

Konforme Abbildung und elliptische Funktionen

Harald Dalichau

München 1993

© Copyright, Prof. Dr.-Ing. Dalichau, München 1993, 2005
All rights reserved.

Vorwort

Dieses Buch ist gedacht für Ingenieure, die ein technisches Problem mit dem Verfahren der konformen Abbildung bearbeiten wollen. Die Grundlagen der konformen Abbildung sind in fast allen Lehrbüchern der Theoretischen Elektrotechnik bzw. der Feldtheorie oder der Elektrostatik hinreichend ausführlich behandelt. Das neue an diesem Buch ist der Programmanhang mit über 500 Basic-Programmen, mit denen die einzelnen Abbildungen bzw. Feldbilder unmittelbar berechnet werden können. Die Vorgehensweise ist also folgende:

1. Man sucht im Abbildungsverzeichnis, Kapitel 15, die gewünschte Abbildung bzw. die dazugehörige Elektrodenkonfiguration.
2. Man ruft das Programm mit der entsprechenden Abbildungs-Nummer auf (die dazu notwendige Software HTBasic ist als kostenlose Demo-Version unter www.htbasic.de erhältlich) und modifiziert bei Bedarf die Eingabedaten, um das gewünschte Ergebnis zu bekommen.
3. Man läßt das Programm laufen und schaut sich das Ergebnis auf dem Bildschirm an.
4. Man speichert das Feldbild in einer Datei.
5. Man übernimmt das Feldbild in eine Präsentation bzw. Dokumentation.

Grundsätzlich besteht also nicht die Notwendigkeit, sich das Buch durchzulesen bzw. sich in das Verfahren der konformen Abbildung einzuarbeiten.

Heutzutage, wo Softwarepakete zur zwei- und dreidimensionalen Feldberechnung zum Standardwerkzeug vieler Entwicklungsingenieure gehören, ist das Verfahren der konformen Abbildung weitgehend bedeutungslos geworden. Anwendung findet es allenfalls noch in der Ausbildung von Ingenieuren und Physikern, zur Darstellung von Feldbildern in Präsentationen und zum Ableiten von analytischen Näherungsformeln.

Nachdem ich in meinem Berufsleben häufiger mit konformen Abbildungen zu tun hatte (wahrscheinlich auch deswegen, weil ich das Verfahren gut kenne), habe ich das Sammeln konformer Abbildungen und das systematische Ableiten neuer Abbildungsfunktionen nach meiner Promotion für mehrere Jahre zu meinem privaten Hobby gemacht. Da nach und nach sehr viele Abbildungen zusammenkamen, lag es nahe, die Programmsammlung und die benutzten Verfahren zu veröffentlichen.

Wenn man sich etwas ausführlicher mit dem Verfahren der konformen Abbildung beschäftigt, stößt man unabdingbar auf elliptische Integrale und elliptische Funktionen. Für den Ingenieur wird es nun allerdings sehr schwierig, sich in dieses Spezialgebiet kurzfristig einzuarbeiten, da in der Literatur keine einheitlichen Bezeichnungen benutzt werden. Um diesem Mißstand abzuhelpfen, habe ich in den Kapiteln 12 und 13 neue Bezeichnungen eingeführt, die es erlauben, die unterschiedlichen Schreibweisen auseinanderzuhalten: So werden hier z.B. die verschiedenen Darstellungen der Jakobischen Zeta-Funktion, die in der Literatur alle gleichermaßen mit $Z(\underline{w},k)$ bezeichnet werden, unterteilt in die algebraische Form $Z_a(\underline{w},k)$, die trigonometrische Form $Z_t(\underline{w},k)$ und die elliptische Form $Z_e(\underline{w},k)$.

München, Oktober 1993

Harald Dalichau

Inhaltsverzeichnis

1. Konforme Abbildungen und komplexe Zahlen

- 1.1 Einleitung
- 1.2 Berechnung eines elektrostatischen Feldes ohne konforme Abbildung
- 1.3 Analytische Funktionen
- 1.4 Konforme Abbildung
- 1.5 Spiegelungsprinzip

2. Einfache konforme Abbildungen

- 2.1 Die Abbildung $\underline{z} = \underline{w}^{\varphi/\pi}$
- 2.2 Die Abbildung $\underline{z} = \exp(\underline{w}\pi)$
- 2.3 Die Abbildung $\underline{z} = \ell n \underline{w}$
- 2.4 Die Abbildung $\underline{z} = \arcsin \underline{w}$
- 2.5 Die Abbildung $\underline{z} = \sin \underline{w}$
- 2.6 Die Abbildung $\underline{z} = \tanh \underline{w}$
- 2.7 Die Abbildung $\underline{z} = 1/\underline{w}$

3. Überlagerung komplexer Potentiale

4. Polygonabbildungen

5. Vorabbildungen

6. Folgeabbildungen

- 6.1 Die Funktion $\underline{z} = \underline{w}_1^{\varphi/\pi}$
- 6.2 Arkussinus
- 6.3 Sinus
- 6.4 Logarithmus
- 6.5 Exponentialfunktion
- 6.6 Die Funktion $\underline{z} = 1/\underline{w}_1$
- 6.7 Abbildung von Gebieten

6.8 Verzeichnis einiger Gebietsabbildungen

7. Überlagerung von Feldbildern

8. Elektroden im homogenen Feld

8.1 Senkrechter Einfall des homogenen Feldes

8.2 Schräger Einfall des homogenen Feldes

8.3 Tragflügelprofile

9. Abrunden von Ecken

9.1 Benachbarte Potentiallinie

9.2 Abrunden von Ecken durch Überlagerung von bereichsweise voneinander abweichenden Rändern

9.3 Abrunden von Außenecken mit der Schwarz-Christoffel-Transformation

9.4 Abrunden von Innenecken

10. Elektroden mit konstanter Feldstärke

11. Elliptische Funktionen

11.1 Einführung

11.2 Die Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$

11.3 Die Funktionen $\operatorname{cn}(\underline{w}, k)$ und $\operatorname{dn}(\underline{w}, k)$

11.4 Einige Rechenregeln

12. Elliptische Integrale

12.1 Das elliptische Integral 1. Art

12.2 Das elliptische Integral 2. Art

12.3 Die Jacobische Zeta-Funktion; die Funktionen $B(\underline{w}, k)$ und $D(\underline{w}, k)$

12.4 Das elliptische Integral 3. Art

13. Theta-Funktionen

14. Anwendungen

15. Abbildungsverzeichnis

Elementare und spezielle Funktionen

Elementare und spezielle Kurven

- Gruppe A: Eine unendlich ausgedehnte, leitende Oberfläche
- Gruppe B: Eine leitende Elektrode endlicher Ausdehnung
- Gruppe C: Zwei unendlich ausgedehnte Elektroden, symmetrisch angeordnet, entgegengesetzt gleich große Ladung
- Gruppe D: Zwei unendlich ausgedehnte Elektroden, entgegengesetzt gleich große Ladung
- Gruppe E: Zwei leitende Elektroden endlicher Ausdehnung, symmetrisch angeordnet, entgegengesetzt gleich große Ladung
- Gruppe F: Zwei leitende Elektroden endlicher Ausdehnung, entgegengesetzt gleich große Ladung
- Gruppe G: Radialsymmetrische Feldbilder
- Gruppe H: Einfach periodische Feldbilder
- Gruppe I: Doppelt periodische Feldbilder
- Gruppe J: Einfach periodische Oberflächen
- Gruppe K: Eine endlich und eine unendlich ausgedehnte leitende Elektrode, entgegengesetzt gleich große Ladung
- Gruppe L: Weitere Abbildungen mit Linienladungen
- Gruppe M: Abbildungen mit abgerundeten Ecken
- Gruppe N: Leitende Elektroden mit konstanter Feldstärke
- Gruppe P: Drei und mehr leitende Elektroden
- Gruppe Q: Dipolfelder
- Gruppe R: Leitende Elektroden im homogenen Feld
- Gruppe S: Leitende Elektroden, symmetrisch angeordnet, gleich große, gleichnamige Ladung
- Gruppe T: Abbildungen mit nichtleitenden Rändern
- Gruppe U: Weitere Abbildungen, spezielle Funktionen

16. Basic-Unterprogramme

16.1 Elliptische Funktionen

- 16.1.1 Elliptische Funktion $sn(z, k)$
- 16.1.2 Elliptische Funktion $cn(z, k)$
- 16.1.3 Elliptische Funktion $dn(z, k)$
- 16.1.4 Zeta-Funktion $Z_a(z, k)$
- 16.1.5 Zeta-Funktion $Z_t(\varphi, k)$
- 16.1.6 Zeta-Funktion $Z_e(z, k)$

- 16.1.7 Elliptische Funktionen sn , cn , dn , $Z_e(x,k)$
sowie $K(k)$ und $E(k)$
- 16.1.8 Elliptische Funktionen sn , cn , dn und
 $Z_e(z,k)$

16.2 Elliptische Integrale

- 16.2.1 Vollständige elliptische Integrale $K(k)$ und $E(k)$
- 16.2.2 Vollständige elliptische Integrale K , E , Π ,
 $-\infty < k_c, p, a, b < +\infty$
- 16.2.3 Elliptisches Integral 1. Art $F_a(x,k)$,
reelles Argument
- 16.2.4 Elliptisches Integral 1. Art $F_t(\varphi,k)$,
reelles Argument
- 16.2.5 Elliptisches Integral 1. Art $F_a(z,k)$
- 16.2.6 Elliptisches Integral 1. Art $F_t(\varphi,k)$
- 16.2.7 Elliptisches Integral 2. Art $E_a(z,k)$
- 16.2.8 Elliptisches Integral 2. Art $E_t(\varphi,k)$
- 16.2.9 Elliptisches Integral 2. Art $E_e(z,k)$
- 16.2.10 Elliptisches Integral 2. Art $E_a(z,k_c,a,b)$,
 $B_a(z,k,a=1,b=0)$, $D_a(z,k,a=0,b=1)$
- 16.2.11 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_a(z,k,n)$
- 16.2.12 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_t(\varphi,k,n)$
- 16.2.13 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_e(z,k,a)$
- 16.2.14 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_j(z,k,a)$

16.3 Theta-Funktionen

- 16.3.1 Theta-Funktion $\vartheta_1(z,k)$
- 16.3.2 Theta-Funktion $\vartheta_2(z,k)$
- 16.3.3 Theta-Funktion $\vartheta_3(z,k)$
- 16.3.4 Theta-Funktion $\vartheta_4(z,k)$

Literaturverzeichnis

Anhang

Basic-Programme

1. Konforme Abbildung und komplexe Zahlen

1.1 Einleitung

Die konforme Abbildung ist ein äußerst vielseitiges Verfahren zur analytischen Berechnung zweidimensionaler Potentialfelder. Potentialfelder sind Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u = 0, \quad (1)$$

die in kartesischen Koordinaten x und y

$$\frac{d^2 u(x,y)}{dx^2} + \frac{d^2 u(x,y)}{dy^2} = 0 \quad (2)$$

lautet. Die gesuchte Potentialverteilung $u(x, y)$ erfüllt die Differentialgleichung. Bei eindeutig vorgegebenen Randbedingungen ist die Lösung $u(x, y)$ ebenfalls eindeutig. Sofern eine Funktion $u_1(x, y)$ die Randbedingungen erfüllt und zugleich eine Lösung der Differentialgleichung ist, so ist diese Funktion $u_1(x, y)$ die gesuchte Lösung des dazugehörigen physikalischen Problems und es existiert keine weitere, davon verschiedene Lösung.

Bei den mit der konformen Abbildung zu berechnenden zweidimensionalen Potentialfeldern handelt es sich z.B. um

- statische elektrische Felder,
- statische magnetische Felder,
- stationäre elektrische Strömungsfelder,
- TEM-Wellenfelder,
- stationäre Wärmeströmungsfelder,

- stationäre hydrodynamische Strömungsfelder,
- stationäre aerodynamische Strömungsfelder.

Weitere Anwendung findet die konforme Abbildung unter anderem in der Elastizitätstheorie (z.B. Torsion eines zylindrischen Stabes, Verformung einer Gummi-Membran, ebener Spannungszustand) und bei der Projektion gekrümmter Flächen (z.B. Merkatorprojektion in der Kartographie). Im folgenden werden zur Beschreibung der konformen Abbildung Begriffe und Beispiele aus dem Bereich der statischen elektrischen Felder, aus der Leitungstheorie und aus dem Bereich der stationären elektrischen Strömungsfelder benutzt.

1.2 Berechnung eines elektrostatischen Feldes ohne konforme Abbildung

Beispiel 1: Zwei konzentrische Kreiszylinder

Als Beispiel für ein zweidimensionales elektrostatisches Feld werden zwei sehr lange, konzentrische Kreiszylinder aus Metall betrachtet (Bild 1.1a). Der äußere Zylinder hat das Potential 0 und der innere das Potential u_1 . Gesucht ist der Verlauf der Flächen konstanten Potentials, $u = \text{const}$ (Bild 1.1c). Da das Feldbild in allen Schnittflächen $z = \text{const}$ gleich ist, wird der Verlauf der Potentiallinien $u = \text{const}$ in der x - y -Ebene gesucht (Bild 1.1b). Außerdem der Verlauf der dazu senkrechten Feldlinien (Bild 1.1d): Die Tangente an eine Feldlinie gibt in jedem Punkt (x, y) der Ebene die Richtung des Vektors der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(x, y)$ an.

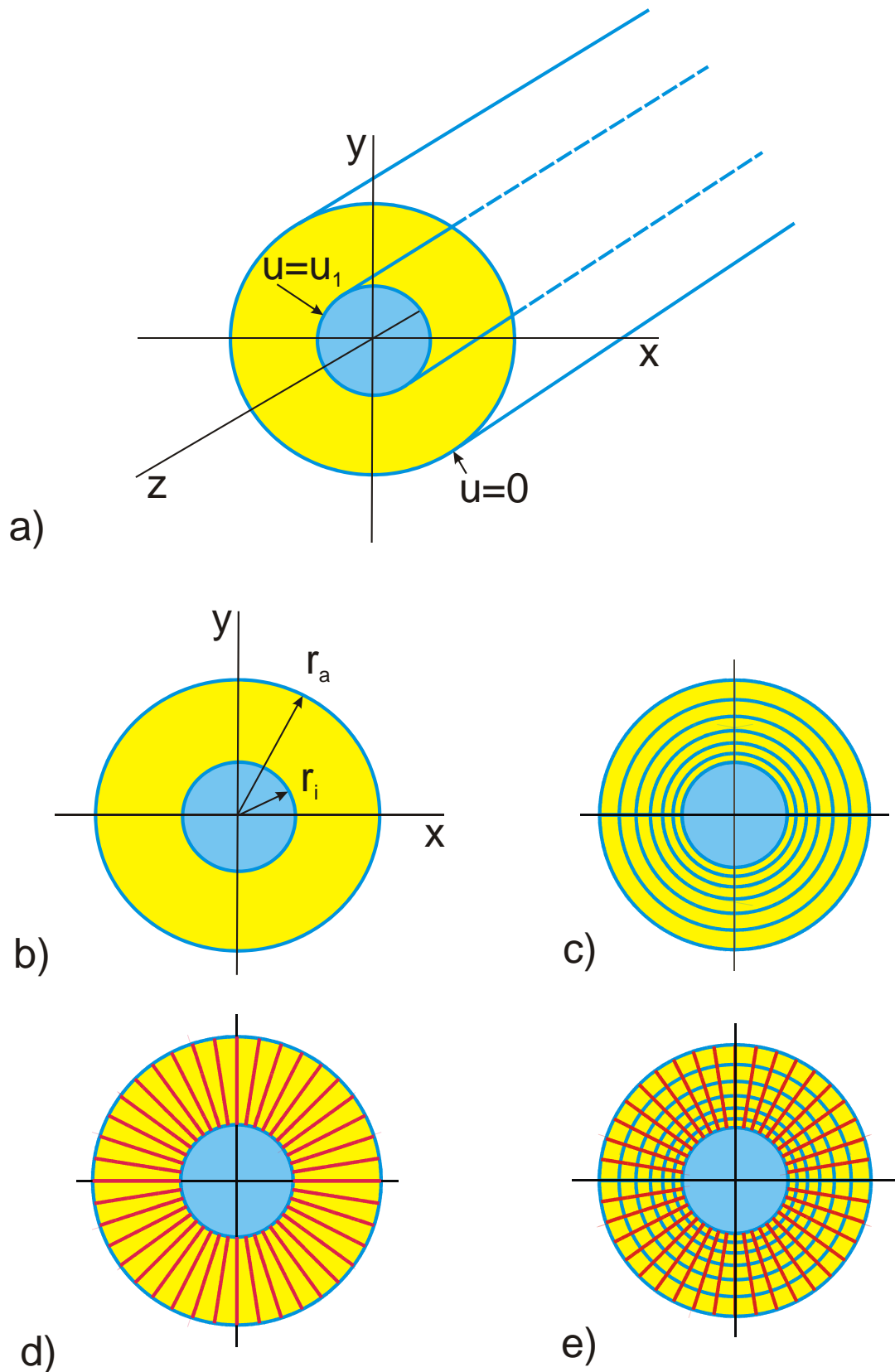


Bild 1.1: Beispiel 1, a) 2 konzentrische Kreiszylinder mit elektrostatischem Feld, b) ebenes Problem, c) Äquipotentiallinien (blau), d) elektrische Feldlinien (rot), e) vollständiges Feldbild

Die Berechnung der gesuchten Potentialverteilung $u(x, y)$ (Bild 1.1e) zwischen den beiden Metallzylindern kann z.B. dadurch erfolgen, daß die reale Anordnung ersetzt wird durch das Feld einer fiktiven Linienladung ρ_L in der Mittelachse der Metallzylinder (Bild 1.2). In dieser Ersatzanordnung ist das Potential $u(x, y)$ bekannt.

$$u(r) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (3)$$

Der Bezugsradius r_0 ist der Radius, bei dem das Potential den Wert $u = 0$ hat. Er kann im Fall der Potentialverteilung nach Bild 1.2 beliebig gewählt werden.

Entsprechend Gl. (1.2) sind alle Potentiallinien in der Ersatzanordnung konzentrische Kreise. Aus dem Satz über die Eindeutigkeit der Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung folgt damit, daß das Feldbild zwischen zwei konzentrischen, metallischen Kreiszyllindern in dem Feldbild einer Linienladung enthalten ist. Damit beide Felder auch zahlenmäßig übereinstimmen, werden der Bezugsradius r_0 und die Größe von ρ_L so festgelegt, daß die beiden Randbedingungen

$$u(r = r_a) = 0 \quad (4)$$

$$u(r = r_i) = u_1 \quad (5)$$

erfüllt sind.

Mit $r_0 = r_a$ und $\rho_L = 2\pi\epsilon u_1 / \ln \frac{r_i}{r_a}$ ergibt sich die gesuchte Potentialverteilung zu

$$u(r) = \frac{u_1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \cdot \ln \frac{r}{r_a} \quad (6)$$

bzw.

$$u(r) = \frac{u_1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \ln r_a + \frac{u_1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \ln r \quad (7)$$

bzw.

$$u(x, y) = -\frac{u_1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \ln r_a + \frac{u_1}{\ln \frac{r_i}{r_a}} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8)$$

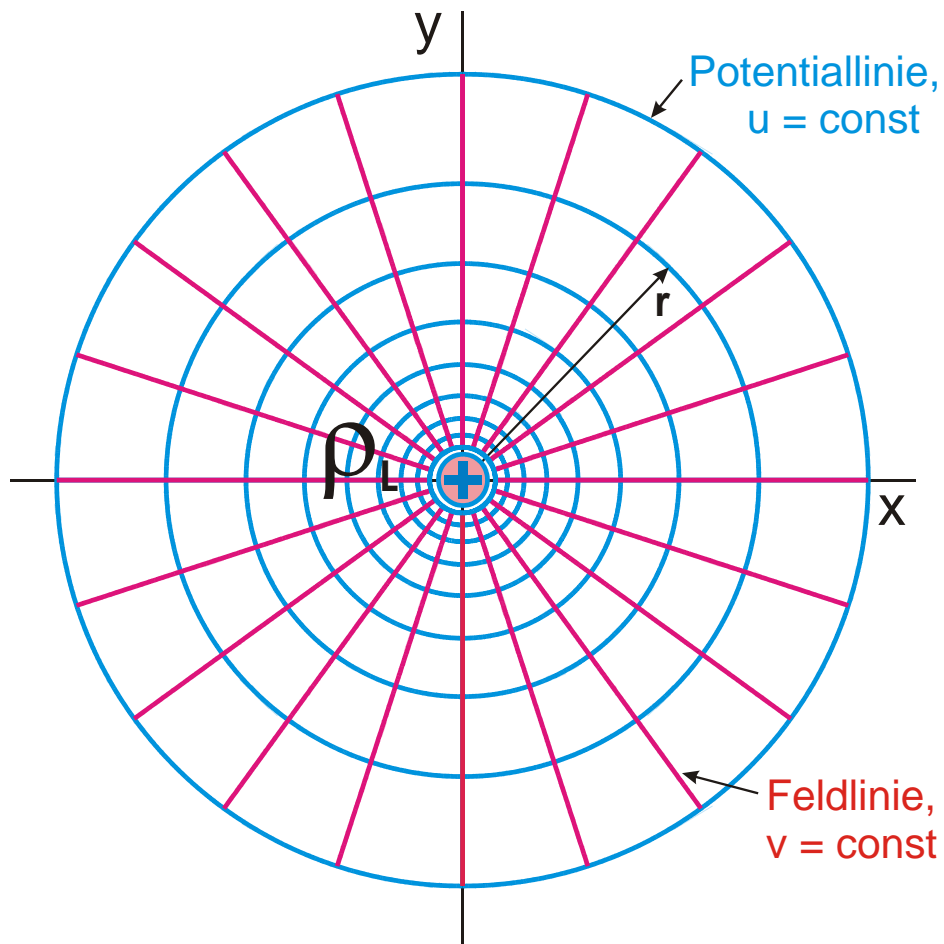


Bild 1.2: Potentiallinien (blau) und Feldlinien (rot) einer Linienladung ρ_L im Nullpunkt des x-y-Koordinatensystems

Beispiel 2: Kreisringsektor

Als weiteres Beispiel wird aus dem Bereich des stationären elektrischen Strömungsfeldes eine Folie aus leitfähigem Material betrachtet. Bild 1.3 zeigt die Draufsicht auf eine Folie der Dicke d mit der elektrischen Leitfähigkeit σ . Die Folie hat

die Form eines Kreisringsektors mit dem Winkel φ_1 . An den beiden blau eingezeichneten Elektroden wird das Potential 0 bzw. u_0 angelegt. Aufgrund der Leitfähigkeit des Materials fließt Strom durch die Folie. Da an den rot eingezeichneten Rändern die Folie aufhört und der nichtleitfähige Außenbereich beginnt, sind die roten Kreisbögen bei $r = r_i$ und $r = r_a$ als Randbedingung fest vorgegebene Strömungslinien. Innerhalb des blau-rot-berandeten Bereichs ist die Potentialverteilung $u(x, y)$ gesucht.

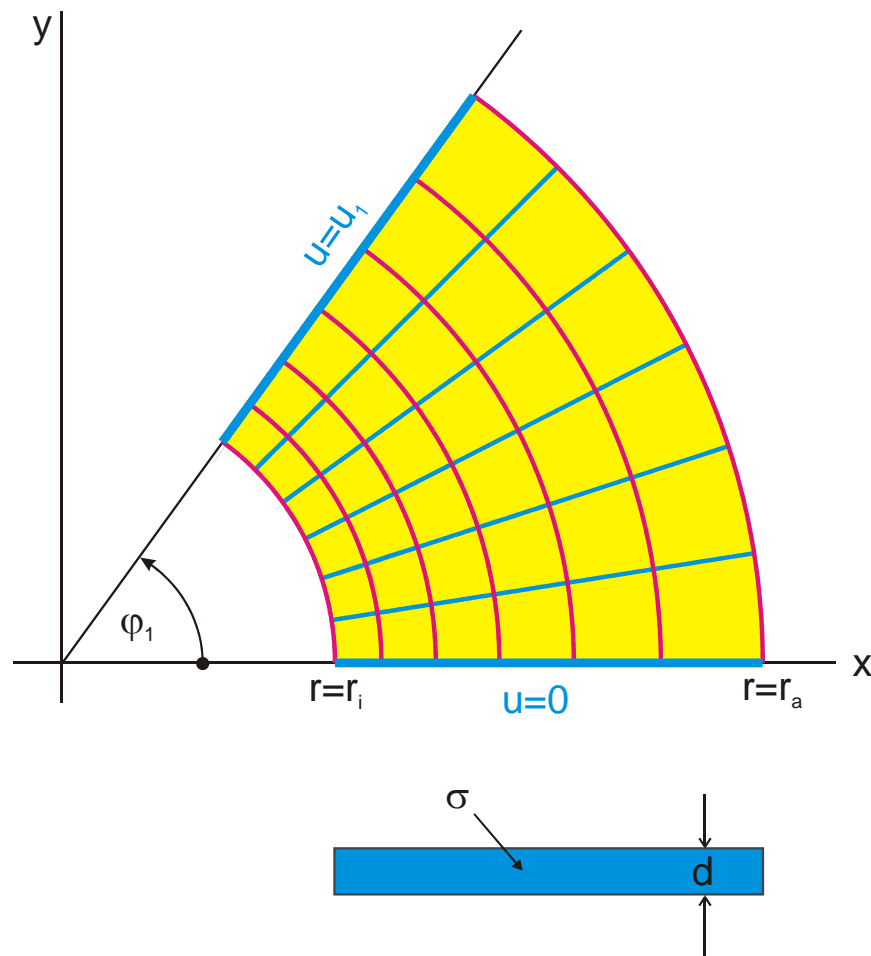


Bild 1.3: Strömungsfeld in einer leitfähigen Folie der Dicke d

Da Strömungslinien und Potentiallinien senkrecht aufeinander stehen und da in der Differentialgleichung (1.3) die x - und die y -Abhängigkeit gleichbehandelt werden, kann man davon ausgehen, daß auch das Feldbild dieser Anordnung durch das Feldbild einer Linienladung im Koordinatennullpunkt entsprechend Bild 1.2 gelöst wird. Nur sind in

diesem Fall die Feldlinien (Strömungslinien) und die Potentiallinien in ihrer Zuordnung vertauscht. Die Strömungslinien sind Teile von konzentrischen Kreisen und die Potentiallinien sind Teile von Strahlen durch den Nullpunkt.

$$u(\varphi) = u_1 \frac{\varphi}{\varphi_1} \quad (9)$$

$$u(x, y) = u_1 \frac{\varphi}{\varphi_1} \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (10)$$

Jedes Bild eines Potentialfeldes entsprechend Bild 1.2 löst also zwei Problemstellungen. Das jeweils andere, duale Problem ergibt sich, indem man die Zuordnung von Potentiallinien und Feldlinien vertauscht.

Wird ein geschlossener Bereich wie in Bild 1.3 betrachtet, dessen Ränder vollständig mit dem Ausschnitt eines größeren Feldbildes übereinstimmen, das z.B. wie in Bild 1.2 für die gesamte x-y-Ebene definiert ist, so stimmt auch das Feldbild im Inneren des geschlossenen Bereichs mit dem des Ausschnitts überein.

1.3 Analytische Funktionen

Eine Funktion \underline{w} einer komplexen Variablen $\underline{z} = x + jy$

$$\underline{w} = f(\underline{z}) \quad (11)$$

heißt analytisch, wenn der Differentialquotient

$$\frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = \lim_{\Delta \underline{z} \rightarrow 0} \frac{\underline{w}(\underline{z} + \Delta \underline{z}) - \underline{w}(\underline{z})}{\Delta \underline{z}} \quad (12)$$

existiert und wenn er unabhängig von der Richtung $\Delta \underline{z} = \Delta x + j\Delta y$ ist. Um den Beweis zu führen, kann man in kartesischen Koordinaten z.B. einmal in x-Richtung

differenzieren und einmal in y-Richtung. Bezeichnet man den Realteil von \underline{w} mit u und den Imaginärteil mit v , also $\underline{w} = u + jv$, so ergibt sich:

$$\text{in x-Richtung: } \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + j[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \quad (13)$$

$$\text{in y-Richtung: } \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y) + j[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{j\Delta y} \quad (14)$$

Die Funktion $f(\underline{z})$ ist analytisch, wenn die Realteile und die Imaginärteile beider Gleichungen jeweils gleich groß sind.

$$\text{Realteile: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \quad (15)$$

$$\text{Imaginärteile: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \right) \quad (16)$$

Gleichung (15) und (16) lauten in der üblichen Schreibweise, als Differentialgleichung,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (18)$$

Sie heißen Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

In Zylinderkoordinaten lauten sie:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (19)$$

Diese Differentialgleichungen werden, wie oben bereits gesagt, üblicherweise benutzt, um nachzuweisen, daß eine Funktion $\underline{w} = f(\underline{z})$ bzw.

$$\underline{w}(\underline{z}) = u(x, y) + j v(x, y) \quad (20)$$

analytisch ist. Dieser Beweis ist notwendig und hinreichend.

Durch nochmaliges Differenzieren und Einsetzen ergibt sich aus ihnen, daß Realteil u und Imaginärteil v jeweils für sich die Laplacesche Differentialgleichung erfüllen.

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (22)$$

Eine Funktion ist in einem Gebiet analytisch (andere Bezeichnung: regulär, holomorph), wenn sie in allen Punkten dieses Gebiets differenzierbar ist. Einzelne singuläre Punkte, in denen die Funktion nicht differenzierbar ist, sind zulässig. Eine analytische Funktion, die als Singularitäten nur Pole hat, ist eine meromorphe Funktion. Da z.B. alle elementaren algebraischen und transzendenten Funktionen diese Bedingung erfüllen, gibt es sehr viele analytische Funktionen. Weiterhin sind analytische Funktionen von analytischen Funktionen ebenfalls analytisch.

Analytische Funktionen lassen sich in drei Klassen einteilen:

- nichtperiodische,
- einfach-periodische und
- doppelt-periodische

analytische Funktionen. Einfach-periodische Funktionen sind z.B. die trigonometrischen Funktionen und die Exponentialfunktion. Doppelt-periodische analytische Funktionen heißen elliptische Funktionen.

Realteil und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind harmonische Funktionen. Sofern z.B. der Realteil bekannt ist, kann daraus ein Imaginärteil so berechnet werden, daß beide zusammen eine analytische Funktion ergeben. $v(x,y)$ ist die zu $u(x,y)$ konjugiert harmonische Funktion und $-u(x,y)$ ist die zu $v(x,y)$ konjugiert harmonische Funktion.

Dieses Zusammentreffen, daß bei der Bearbeitung physikalischer Probleme die Laplacesche Differentialgleichung in einem Gebiet mit den Ortskoordinaten x und y zu lösen ist und daß bei analytischen Funktionen $\underline{w} = f(x + jy)$ sowohl der Realteil von \underline{w} als auch der Imaginärteil von \underline{w} ebenfalls die Laplacesche Differentialgleichung erfüllen, gibt die Möglichkeit, die physikalischen Probleme mit den Methoden der Funktionentheorie zu lösen:

- Die Ortskoordinaten x und y (s. Bild 1.1 und 1.3) werden umbenannt in die reelle Achse x und die imaginäre Achse y der komplexen \underline{z} -Ebene.
- Als Lösung wird nicht mehr nach einer Potentialfunktion $u(x,y)$ oder einer Feldfunktion $v(x,y)$ gesucht, sondern nach der komplexen Funktion $\underline{w} = u(x,y) + jv(x,y)$ mit dem Realteil $u(x,y)$ und dem Imaginärteil $v(x,y)$.

Die Funktion $\underline{w}(x,y)$ heißt komplexes Potential. Ihr Realteil und ihr Imaginärteil können entweder als Potentialfunktion oder als Feldfunktion des zugehörigen physikalischen Problems interpretiert werden. Im Fall von Beispiel 1 bzw. 2 gilt:

$$\underline{w}(x,y) = \ell n \underline{z} \quad (23)$$

mit

$$\ell n \underline{z} = \ell n(x + jy) = \ell n \left[\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \exp(j \arctan(y/x)) \right] \quad (24)$$

$$\ell n \underline{z} = \ell n \sqrt{x^2 + y^2} + j \arctan(y/x) \quad (25)$$

ergibt sich

$$\operatorname{Re} \underline{w} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (26)$$

$$\operatorname{Im} \underline{w} = \arctan(y/x). \quad (27)$$

Ein Vergleich mit Gl. (1.13) und (1.18) zeigt, daß $\operatorname{Re} \underline{w}$ die Potentialfunktion in Beispiel 1 ist und $\operatorname{Im} \underline{w}$ die Potentialfunktion in Beispiel 2. Die in diesem Fall fehlenden konstanten Faktoren und additiven Konstanten sind für die Lösung des Potentialproblems uninteressant. Das Feldbild zwischen zwei konzentrischen Kreiszylindern hat immer das Aussehen entsprechend Bild 1.3, unabhängig davon, wie der jeweilige Zahlenwert für das Potential des inneren und des äußeren Zylinders gewählt wird.

Der erste, unter Umständen schwierige Schritt bei der Lösung eines Potentialproblems ist das Finden der Potentialfunktion $u(x, y)$. Der zweite, triviale Schritt ist dann das Bestimmen der zum speziellen physikalischen Problem gehörigen Konstanten a und b .

$$u_{\text{speziell}}(x, y) = a + b \cdot u(x, y). \quad (28)$$

1.4 Konforme Abbildung

Die Potentialfunktion $u(x, y)$ bzw. das komplexe Potential $\underline{w}(x, y)$ gestatten es, bei einem gegebenen Problem in jedem Punkt (x, y) das dortige Potential $u(x, y)$ zu berechnen. Häufig ist jedoch das Feldbild der Anordnung gesucht, d.h. der Verlauf der Potentiallinien $u = \text{const}$ und der Feldlinien $v = \text{const}$ in der x - y -Ebene (Bild 1.2). Dies ergibt sich aus der Umkehrfunktion $\underline{z}(u, v)$. Die Funktion $\underline{z}(u, v)$ ergibt zu jedem Wert $u = \text{const}$ den Verlauf der zugehörigen Potentiallinie. Im Fall von Beispiel 1 bzw. 2 gilt:

$$\text{komplexes Potential:} \quad \underline{w} = \ell n \underline{z} \quad \Rightarrow \quad \underline{z} = \exp(\underline{w}) \quad (29)$$

$$\text{Feldbild:} \quad \underline{z} = \exp(u + jv) \quad (30)$$

$$\text{Potentiallinie } u = u_0, v \text{ variabel:} \quad \underline{z}_0 = \exp(u_0) \cdot \exp(jv). \quad (31)$$

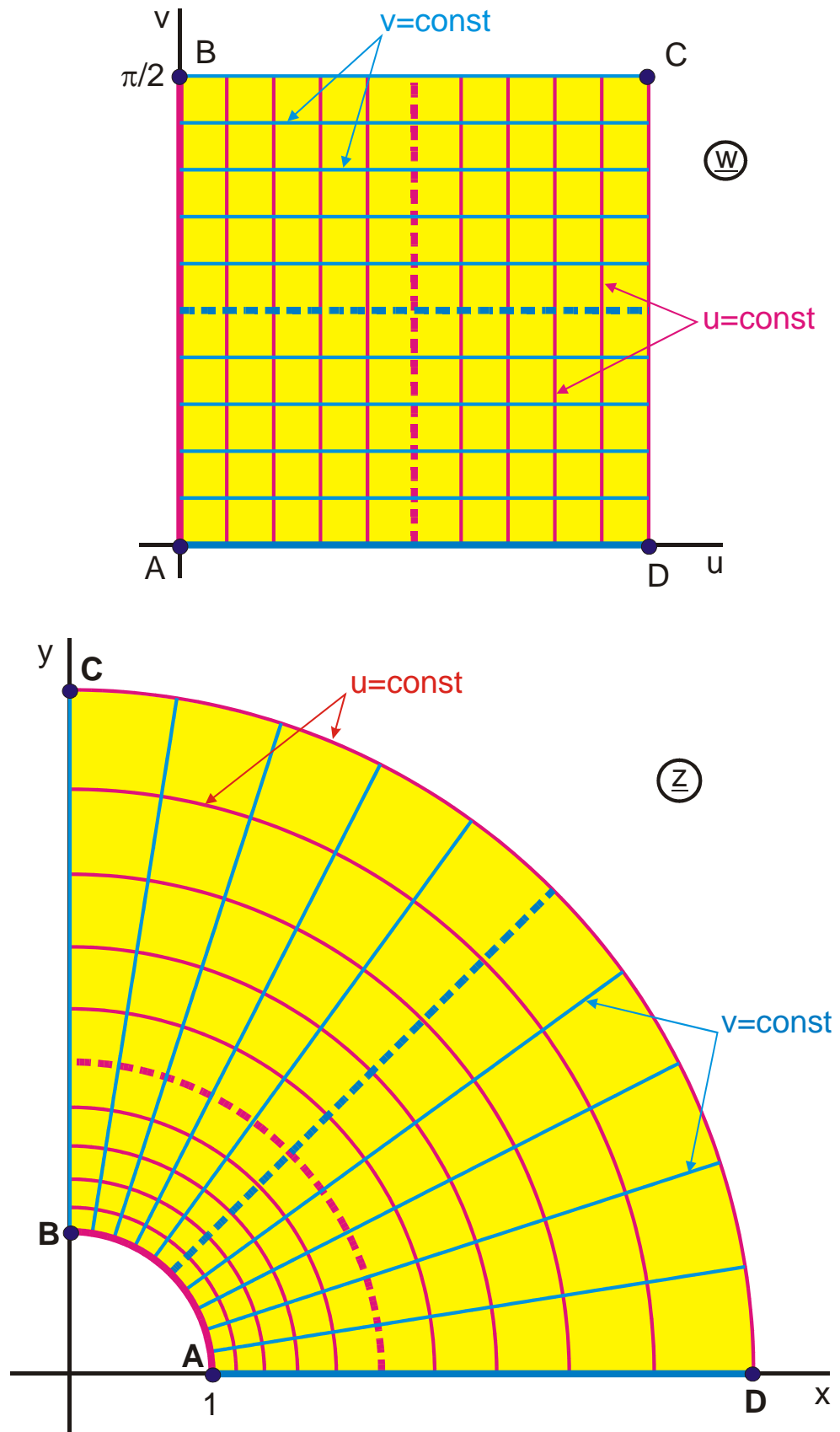
Die gesuchte Potentiallinie ist also ein Kreis um den Nullpunkt der \underline{z} -Ebene mit dem Radius $\exp(u_0)$.

$$\text{Feldlinie } v = v_0, u \text{ variabel:} \quad \underline{z}_0 = \exp(u) \cdot \exp(jv_0). \quad (32)$$

Die gesuchte Feldlinie ist eine Gerade durch den Nullpunkt der \underline{z} -Ebene mit dem Winkel v_0 gegen die positive x-Achse (Bild 1.2, 1.3).

Die Bestimmungsgleichung für das Feldbild $\underline{z} = f(\underline{w})$ läßt sich anschaulich als Abbildung interpretieren: In der \underline{w} -Ebene sind die Linien $u = \text{const}$ (rot) und $v = \text{const}$ (blau) wegen $\underline{w} = u + jv$ Geraden und bilden ein kartesisches Koordinatensystem (Bild 1.4). Die Geraden $u = \text{const}$ werden auf konzentrische Kreisbögen in der \underline{z} -Ebene abgebildet und die parallelen Geraden $v = \text{const}$ werden auf Strahlen durch den Nullpunkt der \underline{z} -Ebene abgebildet. Das Innere des Rechtecks ABCD wird auf das Innere eines Kreisringsegments ABCD abgebildet. Genauso, wie mit Hilfe der Gleichung der zu einer Zahl \underline{w}_1 gehörige Zahlenwert \underline{z}_1 berechnet werden kann, wird durch die graphische Darstellung der \underline{z} - und der \underline{w} -Ebene jedem Punkt in der \underline{w} -Ebene ein Punkt in der \underline{z} -Ebene zugeordnet.

Die graphische Darstellung entsprechend Bild 1.4 der Abbildung der \underline{w} -Ebene in die \underline{z} -Ebene mit einer analytischen Funktion $\underline{z} = f(\underline{w})$ heißt konforme Abbildung. Zu jeder analytischen Funktion $\underline{z} = f(\underline{w})$ gehört eine konforme Abbildung.

Bild 1.4: Die Abbildung $\underline{z} = \exp(\underline{w})$, Abb. B 1

Eigenschaften der konformen Abbildung:

- orthogonale Kurvenscharen gehen über in orthogonale Kurvenscharen.
- zu jedem Punkt in der \underline{z} -Ebene gehört genau ein Punkt in der \underline{w} -Ebene, wobei periodisch sich wiederholende Zuordnungen, wie z.B. bei der Funktion $\underline{z} = \sin \underline{w}$, zulässig sind.
- bei Betrachtung infinitesimal kleiner Gebiete wird jedes Gebilde in der \underline{w} -Ebene in ein ähnliches Gebilde in der \underline{z} -Ebene abgebildet. Das heißt, ein infinitesimal kleiner Kreis bleibt ein Kreis und ein infinitesimal kleines Dreieck bleibt ein Dreieck.

Durch die Abbildung werden sie nur gedreht und verkleinert oder vergrößert. Dies wird als Drehstreckung bezeichnet. Für jeden Punkt der \underline{z} -Ebene kann man somit eine komplexe Zahl angeben. Ihr Betrag ist der Maßstabsfaktor, mit dem alle Längen im zugehörigen Punkt der \underline{w} -Ebene zu multiplizieren sind und ihr Phasenwinkel gibt an, um welchen Winkel alle Strecken gedreht werden.

Da sich Drehung und Streckung von einem Punkt der \underline{z} -Ebene zum Nachbarpunkt hin kontinuierlich verändern, ist die Ähnlichkeit für größere Gebiete selbstverständlich nicht mehr gegeben.

- die konforme Abbildung ist winkeltreu.
- als Folge der Winkeltreue bleibt ein vorgegebener Umlaufsinn um ein beliebig wählbares, geschlossenes Gebiet erhalten. (In Bild 1.4 wird das Viereck ABCD in beiden Ebenen im Uhrzeigersinn durchlaufen.)
- die konforme Abbildung ist eine Ähnlichkeitstransformation (daher das Adjektiv "konform").

Da analytische Funktionen einzelne Singularitäten aufweisen können, in denen sie nicht differenzierbar sind, sind am Ort der Singularität alle oben angeführten Eigenschaften nicht erfüllt.

1.5 Spiegelungsprinzip

Spiegelung an der Ebene:

Im Feldbild zweier gleich großer Linienladungen mit unterschiedlicher Polarität (Abb. E 1, Bild 1.5a) bzw. im Feldbild einer symmetrischen Zweidrahtleitung im Gegentaktbetrieb, ist die Potentiallinie bei $y = 0$ eine unendlich lange gerade Linie. Diese Linie ist eine Symmetrieachse des Feldes (Bild 1.5b). Im dreidimensionalen Feld der beiden Linienladungen ist die Ebene $y = 0$ die Symmetrieebene. Die Randbedingungen des Feldes auf dieser Ebene sind:

1. Die blaue Linie $y = 0$ ist eine magnetische Feldlinie.
2. Das Potential U auf der Symmetrieebene ist konstant.
3. Die elektrischen Feldlinien verlaufen senkrecht zu dieser Ebene.

bzw.

4. $U(y)$ ist eine ungerade Funktion.
5. $E(y)$ ist eine gerade Funktion.

In einem elektrostatischen Feld kann man jede Potentialfläche durch eine leitende Fläche ersetzen, ohne daß sich das Feldbild oberhalb der leitenden Fläche ändert. Insofern kann man auch in Bild 5.1a, b die Symmetrieebene durch einen unendlich ausgedehnten leitenden Halbraum ersetzen (Bild 1.5c). Das Feldbild oberhalb des Halbraumes ist identisch zum Feldbild der oberen Halbebene in Bild 1.5a.

Aus dem geschilderten Sachverhalt folgt, daß man das Feld einer Linienladung oberhalb einer leitenden Halbebene berechnen kann, indem man die leitende Halbebene entfernt und durch eine gespiegelte Linienladung ersetzt, gleich groß mit entgegengesetzter Polarität, die in der gleichen Entfernung h unterhalb der Ebene $y = 0$ angeordnet wird.

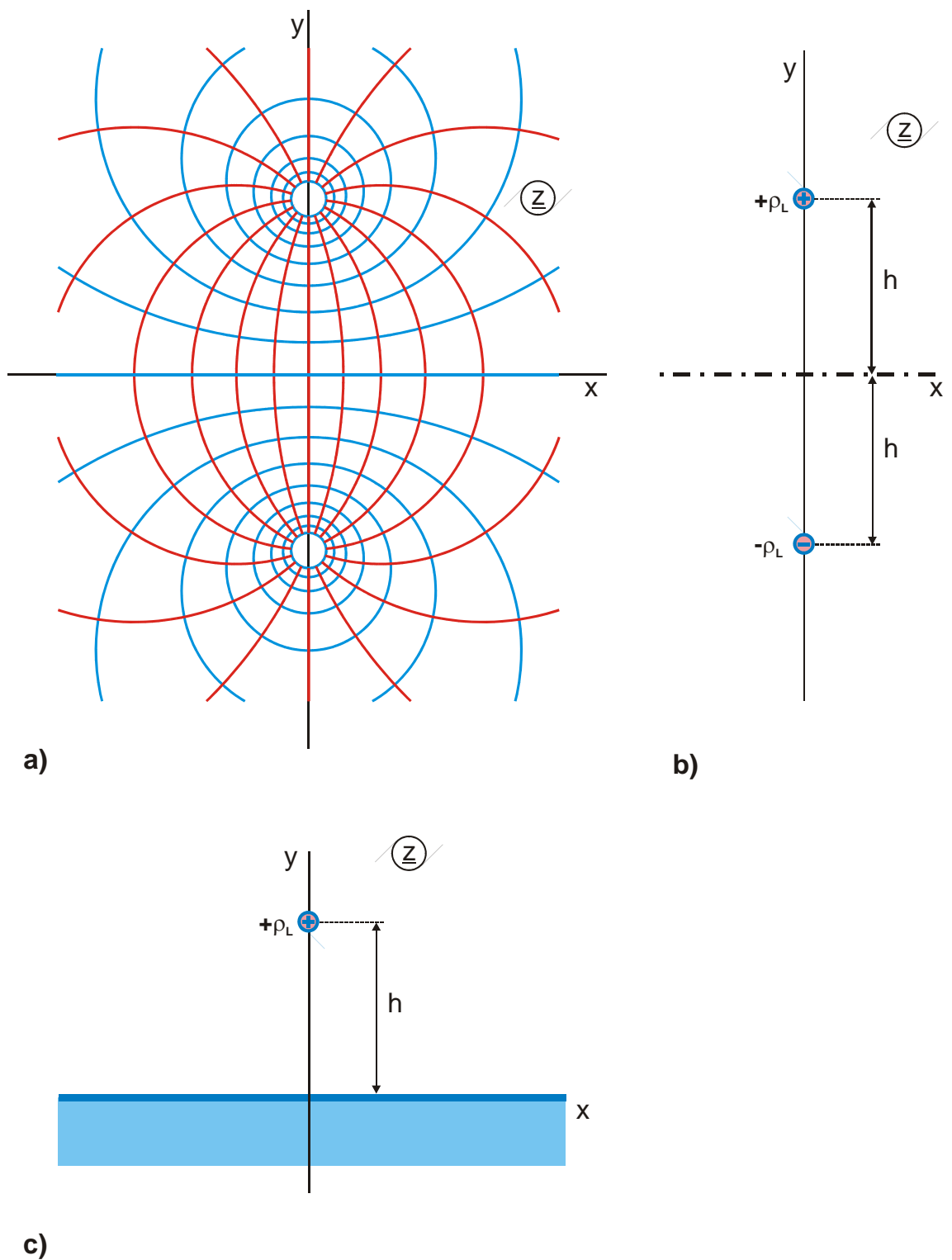


Bild 1.5: Feldbild einer symmetrischen Zweidrahtleitung im Gegentaktbetrieb mit einer Symmetrieebene bei $y = 0$

Dieses Spiegelungsprinzip gilt auch für mehrere Spiegelflächen (Bild 1.6). Es können nicht nur Linienladungen sondern auch Dipole bzw. allgemein beliebige Ladungsverteilungen und Elektrodenformen gespiegelt werden (Bild 1.6d). Das Spiegelungsprinzip gilt nicht nur in der Elektrostatik sondern analog auch für elektromagnetische Wellenfelder, mithin also auch für den Frequenzbereich des sichtbaren Lichts. Damit ist es möglich, sich den beschriebenen Sachverhalt "anschaulich" mit optischen Spiegeln und darin sichtbaren Spiegelbildern zu verdeutlichen.

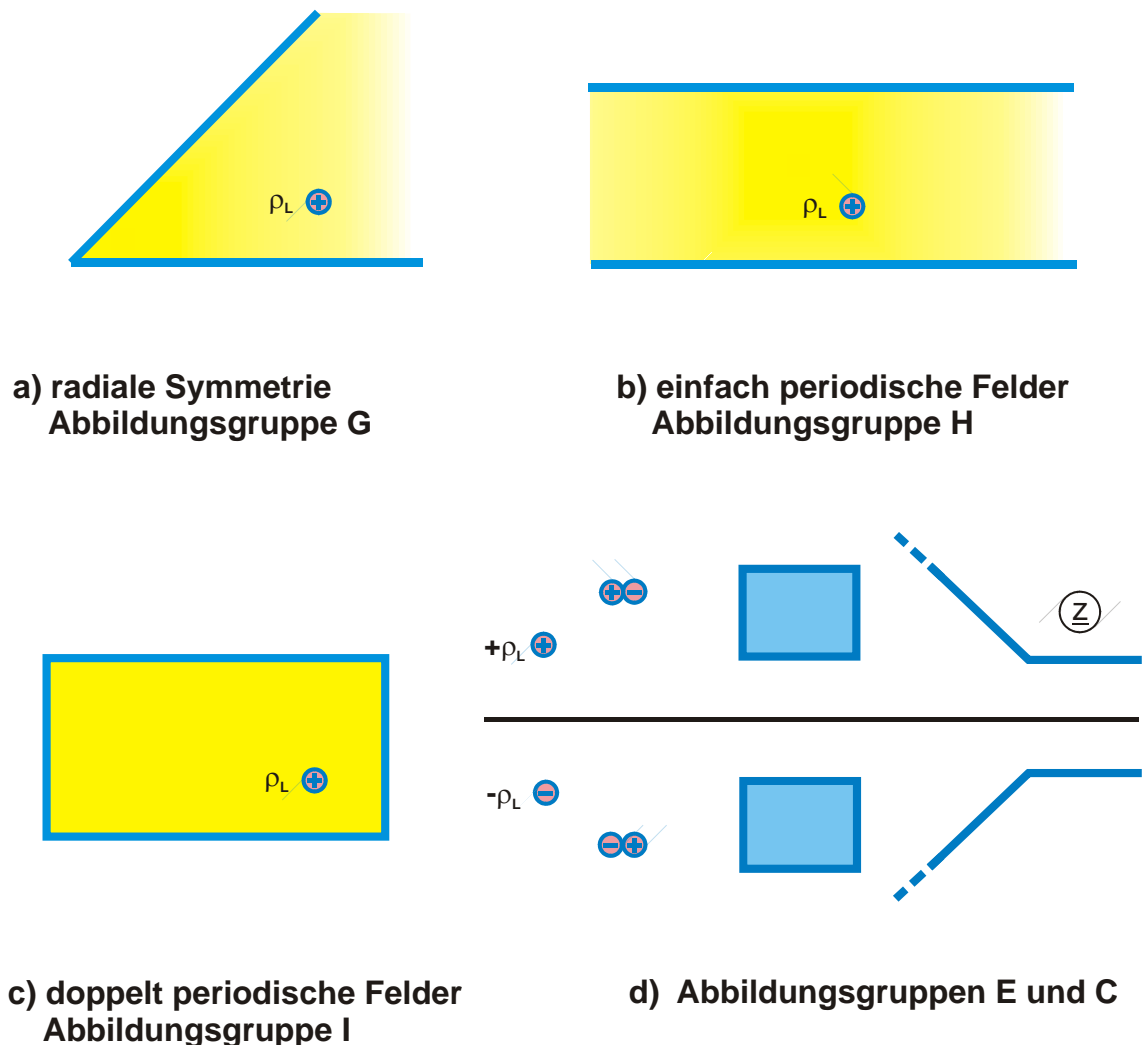


Bild 1.6: Spiegelung an verschiedenen Ebenen; verschiedene Ladungsanordnungen

Das Spiegelungsprinzip hat zusätzlich zu einem analytischen Berechnungsverfahren geführt: Da die Felder von Linienladungen bzw. von Punktladungen und Dipolen analytisch bekannt sind und beliebig superponiert werden können (Kapitel 3), läßt sich das Feld von Bild 1.6b berechnen, indem man zunächst die Linienladung an der oberen Ebene und dann an der unteren Ebene spiegelt. Dann werden diese Spiegelladungen erster Ordnung wiederum jeweils an beiden Ebenen gespiegelt und man erhält die Spiegelladungen zweiter Ordnung, usw. Die Superposition der Felder aller Ladungen ergibt eine gut konvergierende Reihe, mit der das Gesamtfeld der Anordnung näherungsweise berechnet werden kann.

Bei der Betrachtung von Bild 1.5a fällt auf, daß noch eine weitere Symmetrieebene existiert: Die y -Achse des Koordinatensystems ist eine unendlich ausgedehnte geradlinige Feldlinie (rote Linie), abgesehen von den beiden Polstellen am Ort der Linienladung. Die Potentiallinien (blaue Linien) stehen senkrecht auf dieser Linie und das Feldbild im 1. Quadranten ist spiegelbildlich identisch zum Feldbild im 2. Quadranten.

Bild 1.7 verdeutlicht noch einmal die Eigenschaften dieser Symmetrie am Beispiel des Feldes zweier gleich großer Linienladungen gleicher Polarität (Abb. S 1) bzw. des Feldbildes einer symmetrischen Zweidrahtleitung im Gleichtaktbetrieb. Die Ebene $y = 0$ ist die Symmetrieebene des Feldes. In Analogie zur elektrisch leitenden Wand in Bild 1.5, auf der die elektrischen Feldlinien senkrecht stehen, wird diese Ebene als magnetisch leitende Wand bezeichnet. Auf ihr stehen die magnetischen Feldlinien (blaue Linien) senkrecht. Die Randbedingungen des Feldes auf dieser Ebene sind:

1. Die rote Linie $y = 0$ ist eine elektrische Feldlinie.
2. Die magnetischen Feldlinien verlaufen senkrecht zu dieser Ebene.

bzw.

3. $U(y)$ ist eine gerade Funktion.

4. $H(y)$ ist eine gerade Funktion.

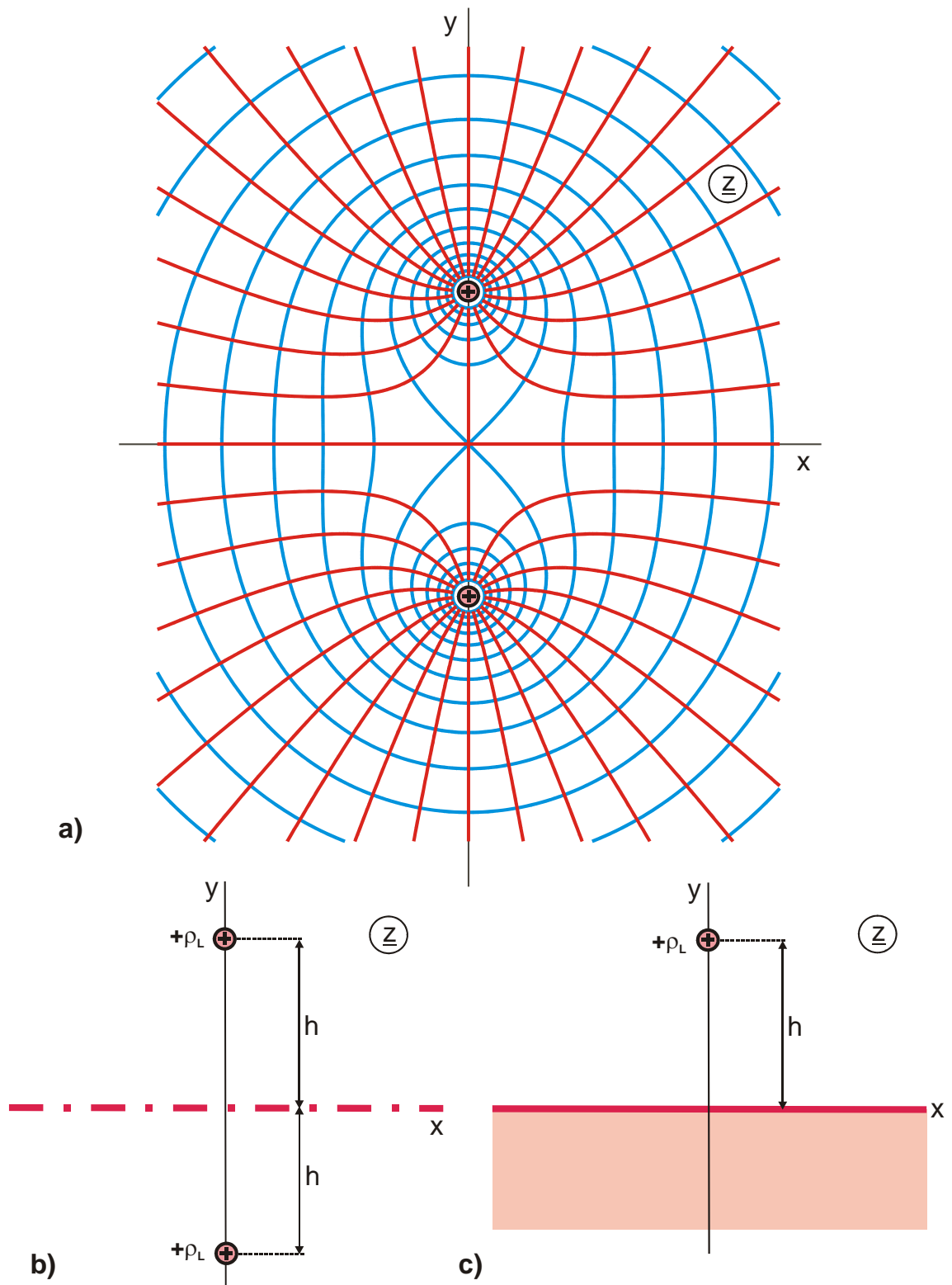


Bild 1.7: Spiegelung an einer magnetisch leitenden Wand am Beispiel des Feldes zweier gleichgroßer Linienladungen gleicher Polarität (Abb. S 1)

Spiegelung am Kreis:

Feldbilder, die mit der konformen Abbildung berechnet wurden, bestehen aus orthogonalen Kurvenscharen. Insofern kann jede Feldlinie und jede Potentiallinie als krummliniger Spiegel interpretiert werden. Der Zusammenhang zwischen einem Punkt vor dem Spiegel und seinem Spiegelbild hinter dem Spiegel ist durch die jeweilige Abbildungsfunktion gegeben. Diese Interpretation bringt allerdings zunächst keine neuen Erkenntnisse. Nur für einige ausgesuchte Spiegelformen, wie zum Beispiel Gerade, Kreis und Ellipse, lassen sich allgemeingültige Abbildungsgesetze aufstellen.

Für die Spiegelung am Einheitskreis gilt das Gesetz der reziproken Radien (Bild 1.8a): Eine positive Linienladung im Abstand r_1 vom Koordinatenursprung erzeugt mit dem Einheitskreis als Potentiallinie (Spiegel) als Spiegelbild eine gleich große negative Linienladung im Abstand $r_2 = 1/r_1$.

Aus diesem Zusammenhang folgt zum Beispiel, daß im Feldbild einer Koplanarleitung (Abb. E 3, Bild 1.8b), das eine kreisförmige Potentiallinie (hellgrün) enthält, der Endpunkt des Innenleiters bei $x_1 = \sqrt{k}$ abgebildet wird in den Endpunkt des Außenleiters bei $x_2 = 1/\sqrt{k}$. Alle Zwischenpunkte werden ebenfalls mit der gleichen Relation zueinander abgebildet. Der Mittelpunkt des Innenleiters bei $x = 0$ wird schließlich nach $x = \infty$ abgebildet.

Mit der gleichen Abbildungsfunktion werden die Feldbilder eines kreisförmigen Innenleiters zwischen zwei planaren Außenleitern (Bild 1.5c) und eines Streifenleiters in einem kreisförmigem Außenleiter (Bild 1.5d) berechnet. Weitere Beispiele für die Spiegelung am Kreis sind im Abbildungsverzeichnis zu finden (E 5, G 7.3, L 1.2 etc.).

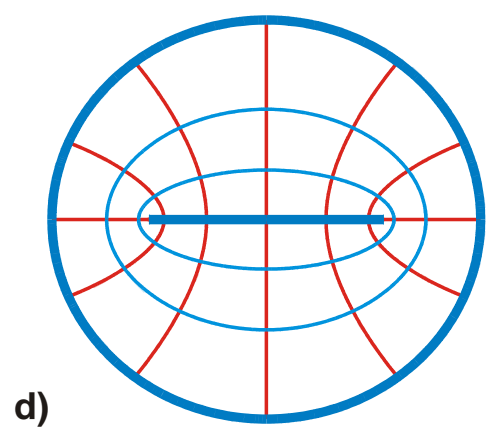
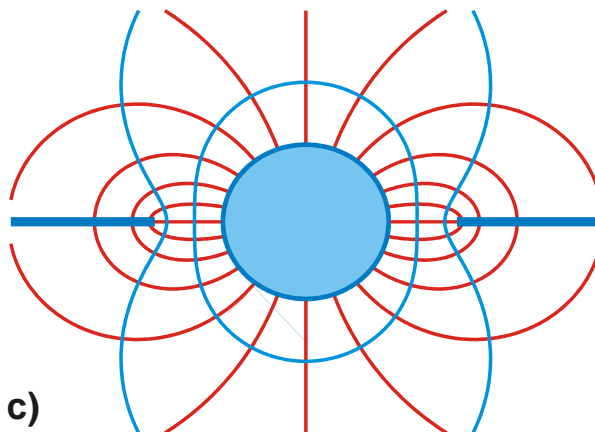
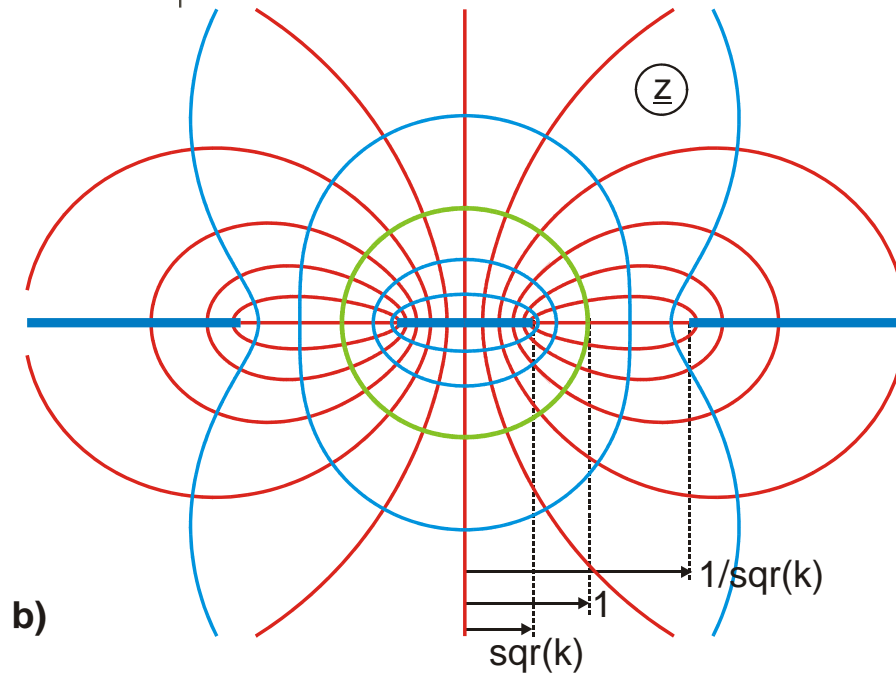
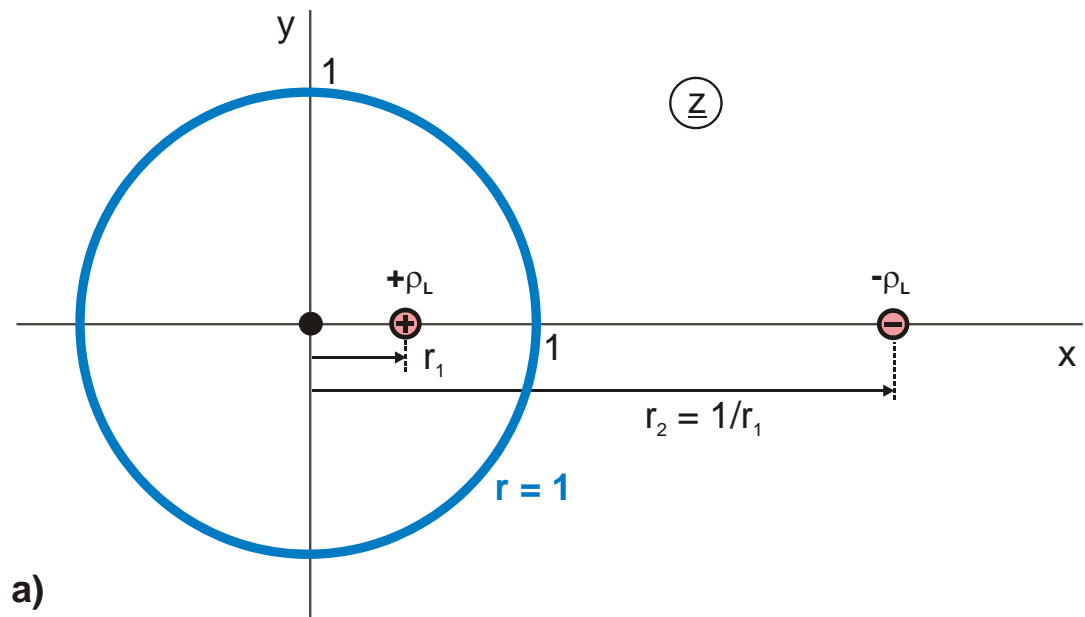


Bild 1.8: Spiegelung am Kreis

Spiegelung an einer Elektrode mit konstanter Feldstärke:

Elektroden mit konstanter Feldstärke haben ebenfalls die Eigenschaft, daß das Spiegelbild einer geraden Linie wiederum eine gerade Linie ergibt. Bild 1.9a zeigt das Feldbild eines um 90° abgelenkten Kanals der Breite b . Auf der mittleren, grün gefärbten Potentiallinie ist die elektrische Feldstärke konstant. Beim Übergang vom homogenen Kanal in der \underline{w} -Ebene zum abgelenkten Kanal in der \underline{z} -Ebene ist diese Linie die "neutrale Faser". Ihre Länge ℓ wird nicht verändert. Bei der Spiegelung an dieser Elektrode geht die untere Berandung mit dem rechten Innenwinkel bei A über in die obere Berandung mit einem rechten Außenwinkel bei B. Die elektrische Feldstärke ist "reziprok symmetrisch" bezüglich der Spiegelelektrode bei $v = b/2$:

$$E(u, v = b/2 + \Delta v) = \frac{1}{E(u, v = b/2 - \Delta v)} \quad (33)$$

Die normierte elektrische Feldstärke in der \underline{w} -Ebene $E(v)$ ist gleich 1 auf der Spiegelelektrode. Unterhalb davon wird sie kleiner und oberhalb davon größer. Im Extremfall wird sie 0 im Punkt A und ∞ im Punkt B.

Weitere Abbildungen mit Elektroden konstanter Feldstärke werden in Kapitel 10 behandelt. Sie bilden die Abbildungsgruppe N.

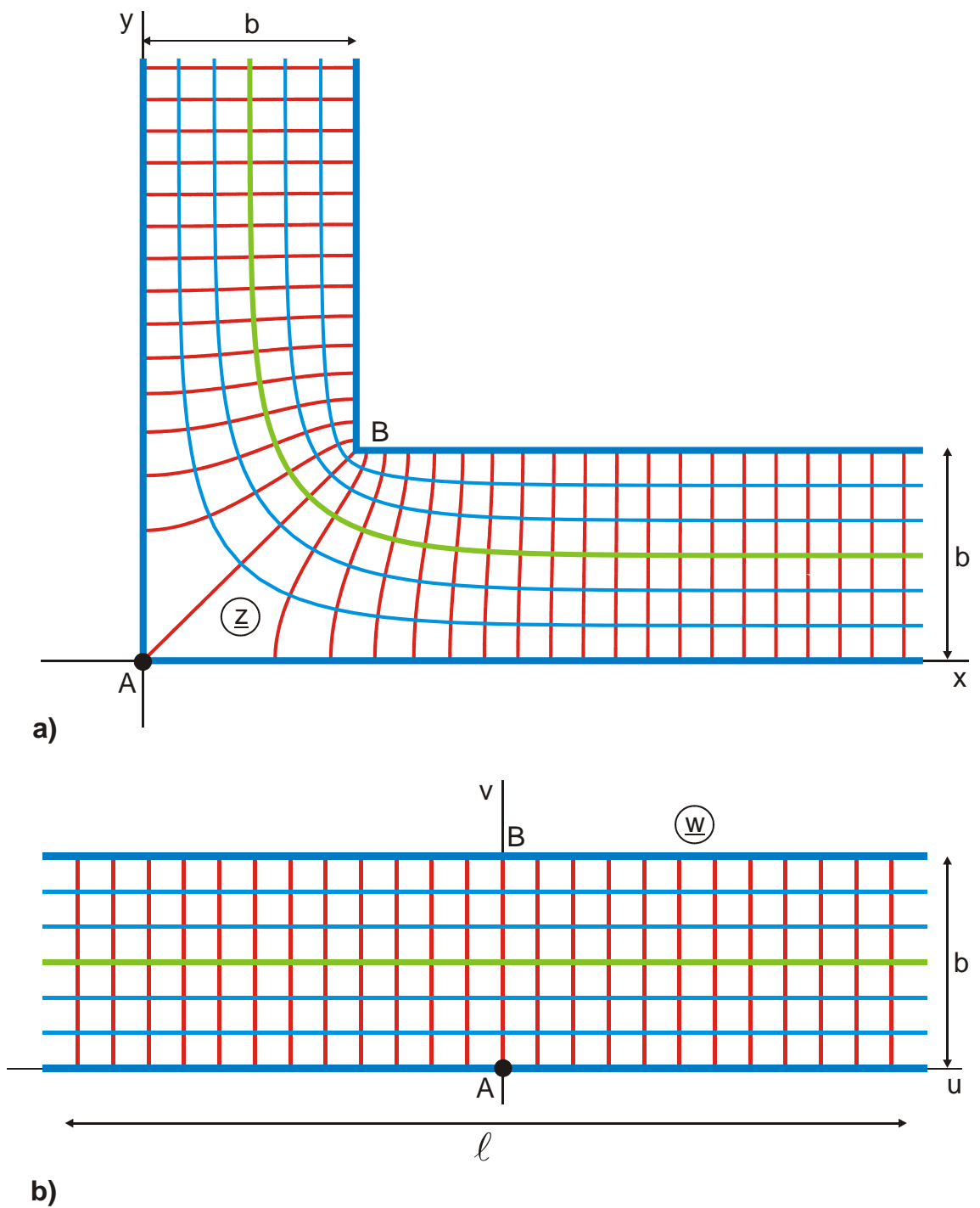


Bild 1.9: Spiegelung an einer Elektrode mit konstanter Feldstärke (grüne Linie)
 (Abb. D 4 und N 1)

2. Einfache konforme Abbildungen

In diesem Kapitel werden einfache konforme Abbildungen mit elementaren Funktionen betrachtet. Es wird jeweils ein kartesisches Koordinatensystem in der w -Ebene auf die z -Ebene abgebildet. In der w -Ebene ist ein homogenes Feld mit horizontal verlaufenden, blauen Potentiallinien ($v = \text{const}$) und vertikal verlaufenden, roten Feldlinien ($u = \text{const}$). Nach der Umrechnung der einzelnen Punkte mit der Abbildungsfunktion ergibt sich das gesuchte inhomogene Feld (das Feldbild) in der z -Ebene, ebenfalls mit blauen Potentiallinien und roten Feldlinien.

w-Ebene:	kartesische Koordinaten $\underline{w} = u + jv$
	homogenes Feld
z-Ebene:	Bildebene
	inhomogenes Feld
	Feldbild

Wenn man wissen möchte, in welchen Punkt \underline{z}_1 der Punkt \underline{w}_1 abgebildet wird, setzt man \underline{w}_1 in die Abbildungsfunktion $\underline{z} = f(\underline{w})$ ein und erhält

$$\underline{z}_1 = f(\underline{w}_1). \quad (1)$$

In der Regel ist es ausreichend, die Abbildung des Randes zu betrachten, um die Eigenschaften der jeweiligen konformen Abbildung kennenzulernen.

2.1 Die Abbildung $\underline{z} = \underline{w}^{\varphi/\pi}$

Durch die Abbildung wird die reelle Achse im Nullpunkt geknickt (Bild 2.1). Alle Punkte $\underline{w} = u$ entlang der positiven reellen Achse gehen über in Punkte $\underline{z} = u^{\varphi/\pi}$ ebenfalls auf der positiven reellen Achse. Die negative reelle Achse $\underline{w} = u \cdot \exp(j\pi)$ geht über in $\underline{z} = u \cdot \exp(j\varphi)$, eine Gerade durch den Nullpunkt mit dem Winkel φ . Der Punkt B bleibt im jeweiligen Koordinatenursprung. Der Punkt $\underline{w} = 1$ geht unverändert über in den Punkt $\underline{z} = 1$; alle Punkte auf dem Kreis $w = 1$ gehen über in Punkte auf dem Kreis $z = 1$.

Im Grenzfall $\varphi = 2\pi$ bildet die Funktion $\underline{z} = \underline{w}^2$ die obere w -Halbebene auf die gesamte z -Ebene ab (Abb. A1.2). Der Punkt $\underline{z} = 0$ ist der singuläre Punkt dieser Abbildungsfunktion.

Zur Veranschaulichung einer konformen Abbildung kann man sich folgendes vorstellen:

- Das Feldbild in der \underline{z} -Ebene ergibt sich, indem man das homogene Feld in der \underline{w} -Ebene in einem gekrümmten Spiegel betrachtet.
- Das Feldbild in der \underline{z} -Ebene ergibt sich, indem man das homogene Feld in der \underline{w} -Ebene durch eine optische Linse mit entsprechend stetig gekrümmter Oberfläche betrachtet.
- Feldlinien und Potentiallinien haben die Biegsamkeit von dünnen Stahldrähten und gleichzeitig die Dehnbarkeit von Gummibändern. Sie bilden ein gut verformbares, ebenes Gitternetz, bei dem Feld- und Potentiallinien stets senkrecht aufeinander stehen. Im Fall der Abbildung in Bild 2.1 befindet sich im Punkt B der \underline{w} -Ebene (am Ort der Singularität) ein Scharnier. Wenn man die linke Randelektrode AB um diese Scharnierachse schwenkt, ergibt sich das Feldbild in der \underline{z} -Ebene.

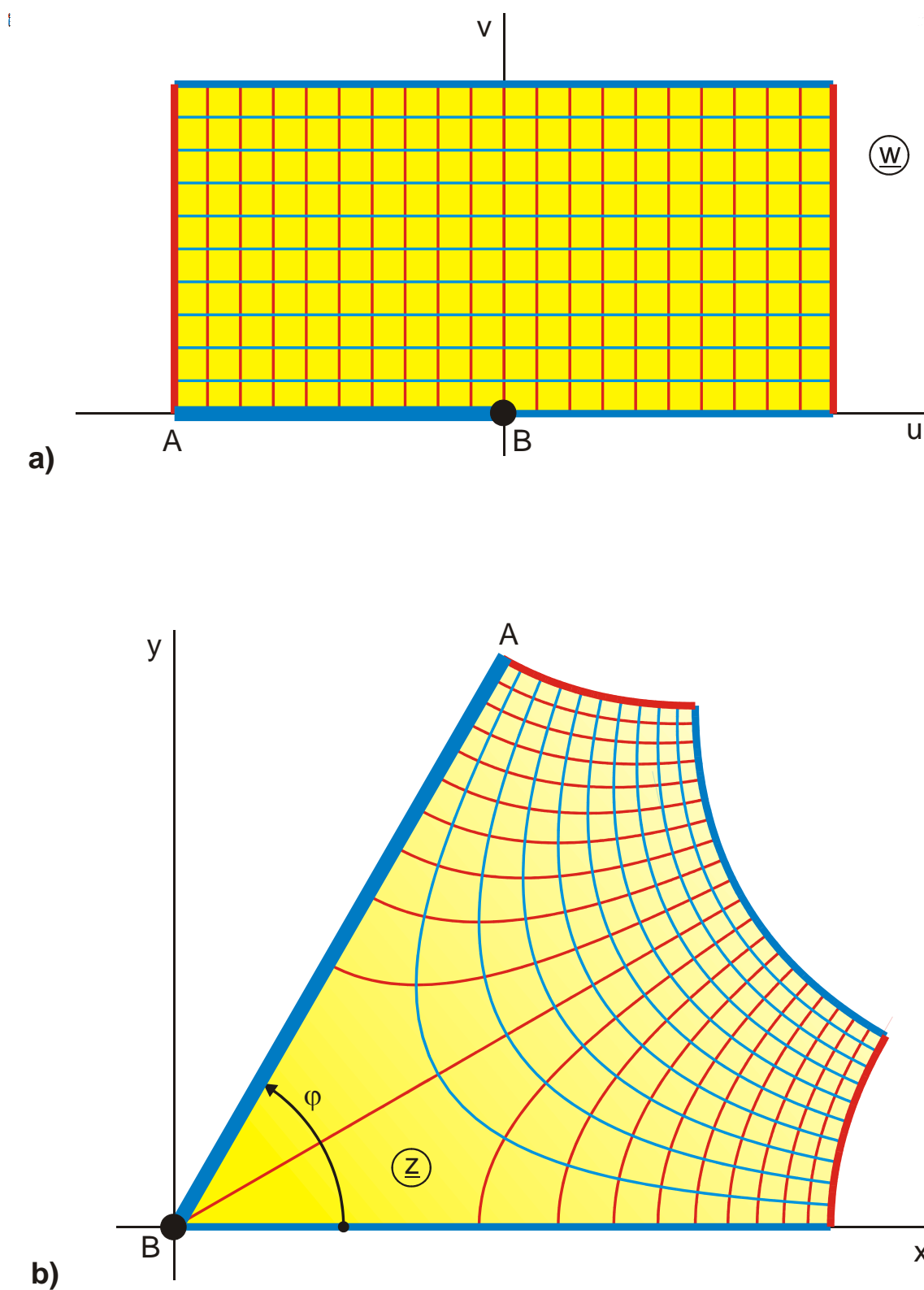


Bild 2.1: Die Abbildung $\underline{z} = \underline{w}^{\varphi/\pi}$ für $\varphi = 60^\circ$

2.2 Die Abbildung $\underline{z} = \exp(\underline{w}\pi)$

Die Abbildung wurde bereits in Kapitel 1 erwähnt (Bild 1.4). Ein kartesisches Koordinatennetz wird durch die Exponentialfunktion in ein Polarkoordinatennetz umgewandelt. Bild 2.2 zeigt, daß ein Parallelstreifen in der w -Ebene auf den 1. Quadranten der z -Ebene abgebildet wird. Die Punkte auf der Geraden \overline{ADC}

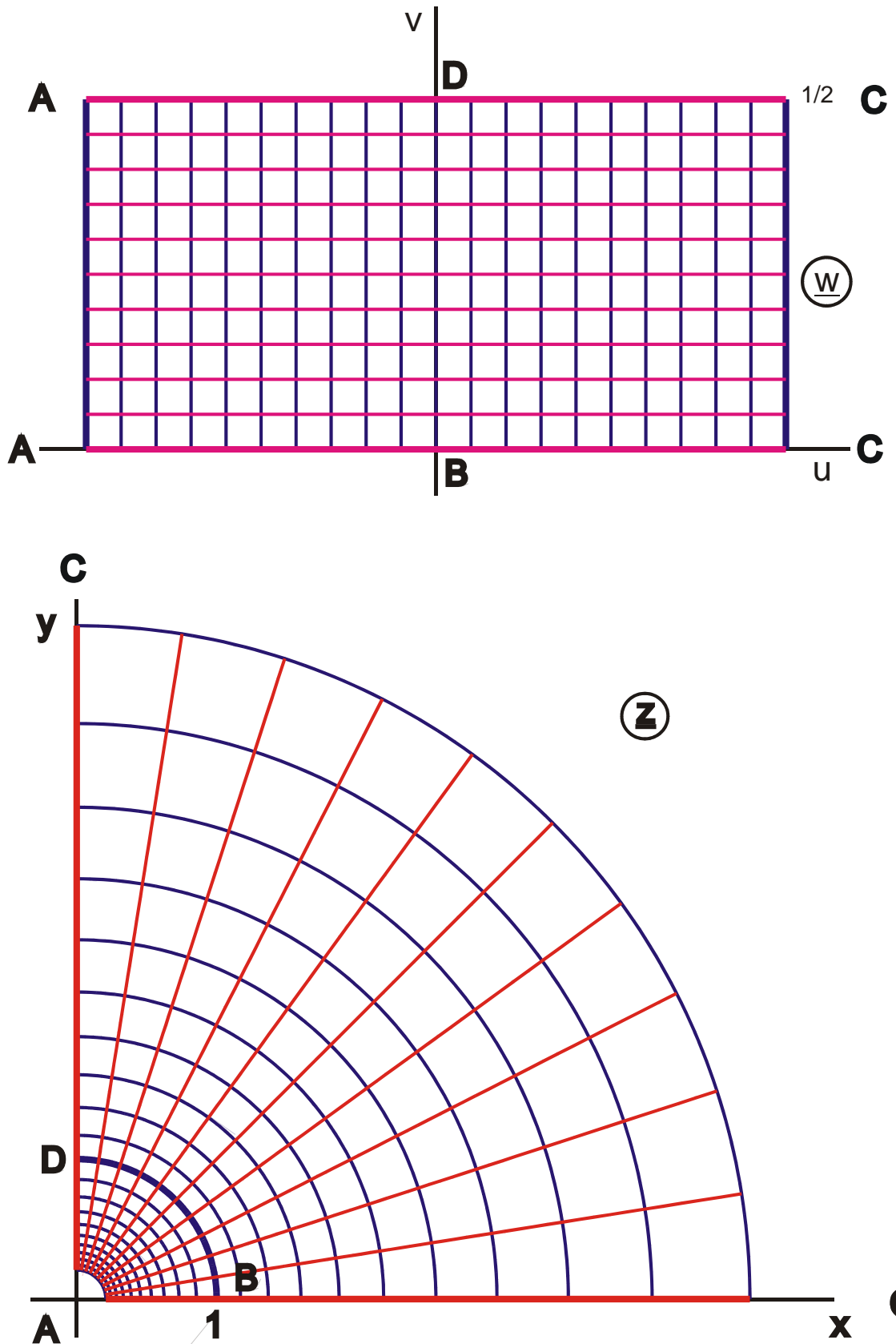
$$\underline{w} = u + j/2 \quad (2)$$

werden wegen

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \exp(u\pi + j\pi/2) = \exp(u\pi) \cdot \exp(j\pi/2) \\ z &= j \exp(u\pi) \end{aligned} \quad (3)$$

auf \overline{ADC} um die positive imaginäre Achse abgebildet. Anschaulich betrachtet wird die Gerade 90° hochgeklappt und der Punkt $-\infty$ geht über in den Nullpunkt. Alle vertikalen Linien werden Kreisbögen. Die Gerade \overline{BD} geht über in einen Viertelkreis mit dem Radius 1. Da bis zum Punkt A noch unendlich viele blaue Linien existieren, ergibt sich im Nullpunkt der z -Ebene eine Linienladung.

Die gesamte z -Ebene ergibt sich als Abbild des Parallelstreifens von $v = -1$ bis $v = +1$. Dazu parallele Streifen ergeben periodisch wieder die gleiche Abbildung.

Bild 2.2: Die Abbildung $\underline{z} = \exp(\underline{w}\pi)$, Abb. B 1

2.3 Die Abbildung $\underline{z} = \ell n \underline{w}$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, ergibt sich die gesuchte Abbildung aus Bild 2.2, indem man sich in der z -Ebene ein kartesisches Gitternetz vorstellt und dessen Abbildung auf den Parallelstreifen in der w -Ebene durchführt.

Bild 2.3 zeigt, daß der I. Quadrant der w -Ebene auf einen Parallelstreifen zwischen $v = 0$ und $v = \pi/2$ abgebildet wird.

$$\text{Punkt B:} \quad \underline{z}_B = \ell n 1 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Punkt D:} \quad \underline{z}_D = \ell n(j) = \ell n \exp(j\pi/2) = j\pi/2 \quad (5)$$

Die gesamte w -Ebene wird auf einen Parallelstreifen von $y = -\pi$ bis $+\pi$ abgebildet. Die Abbildung wird als einfach periodisch bezeichnet, da die Periodizität nur in einer Dimension, nämlich in y -Richtung gegeben ist.

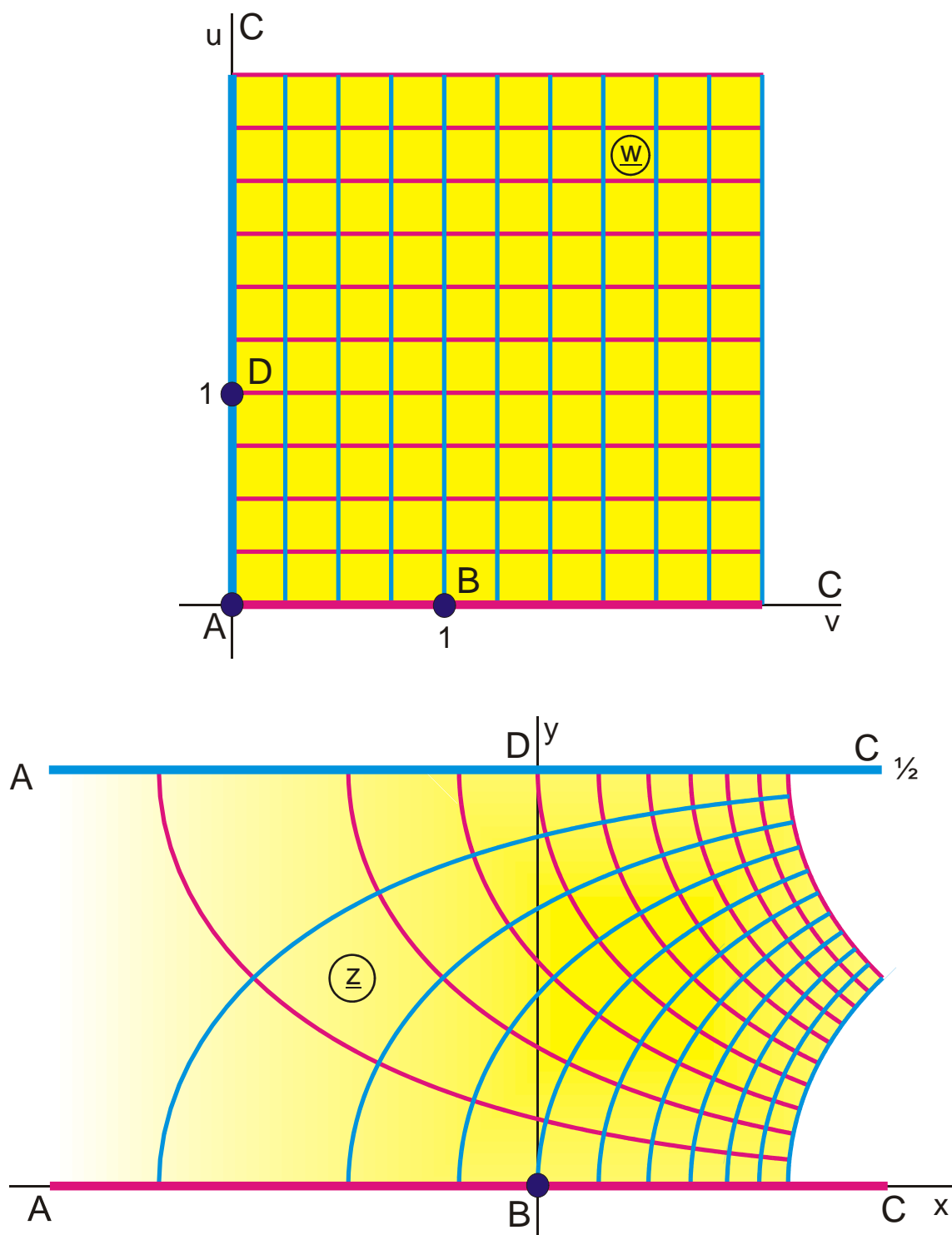


Bild 2.3: Die Abbildung $z = \ln w$, Abb. H 1

2.4 Die Abbildung $\underline{z} = \arcsin \underline{w}$

Wie Bild 2.4 zeigt, wird durch den Arkussinus die reelle Achse in den Punkten -1 und +1 um 90° abgewinkelt. Die obere w -Halbebene wird auf einen Halbstreifen von $u = -\pi/2$ bis $u = +\pi/2$ abgebildet. Entsprechend wird die gesamte w -Ebene auf den Parallelstreifen abgebildet. Wie beim Logarithmus ist die Abbildung mit dem Arkussinus einfach periodisch. Die Verwandtschaft der Ränderabbildung bei beiden Abbildungen folgt aus

$$\arcsin \underline{w} = -j \ln (j\underline{w} + \sqrt{1 - \underline{w}^2}). \quad (6)$$

Entsprechend Kapitel 5 handelt es sich also um den Logarithmus mit einer Vorabbildung.

Die Punkte entlang der reellen Achse zwischen A und C ergeben sich zu:

$$x = \arcsin u. \quad (7)$$

Die Punkte zwischen C und D ergeben sich mit Gl. 6 zu

$$\underline{z} = \frac{\pi}{2} + j \operatorname{arcosh} u. \quad (8)$$

Alle Punkte auf der imaginären Achse der w -Ebene werden in der Bildebene ebenfalls auf die imaginäre Achse abgebildet.

$$y = \operatorname{arsinh} v. \quad (9)$$

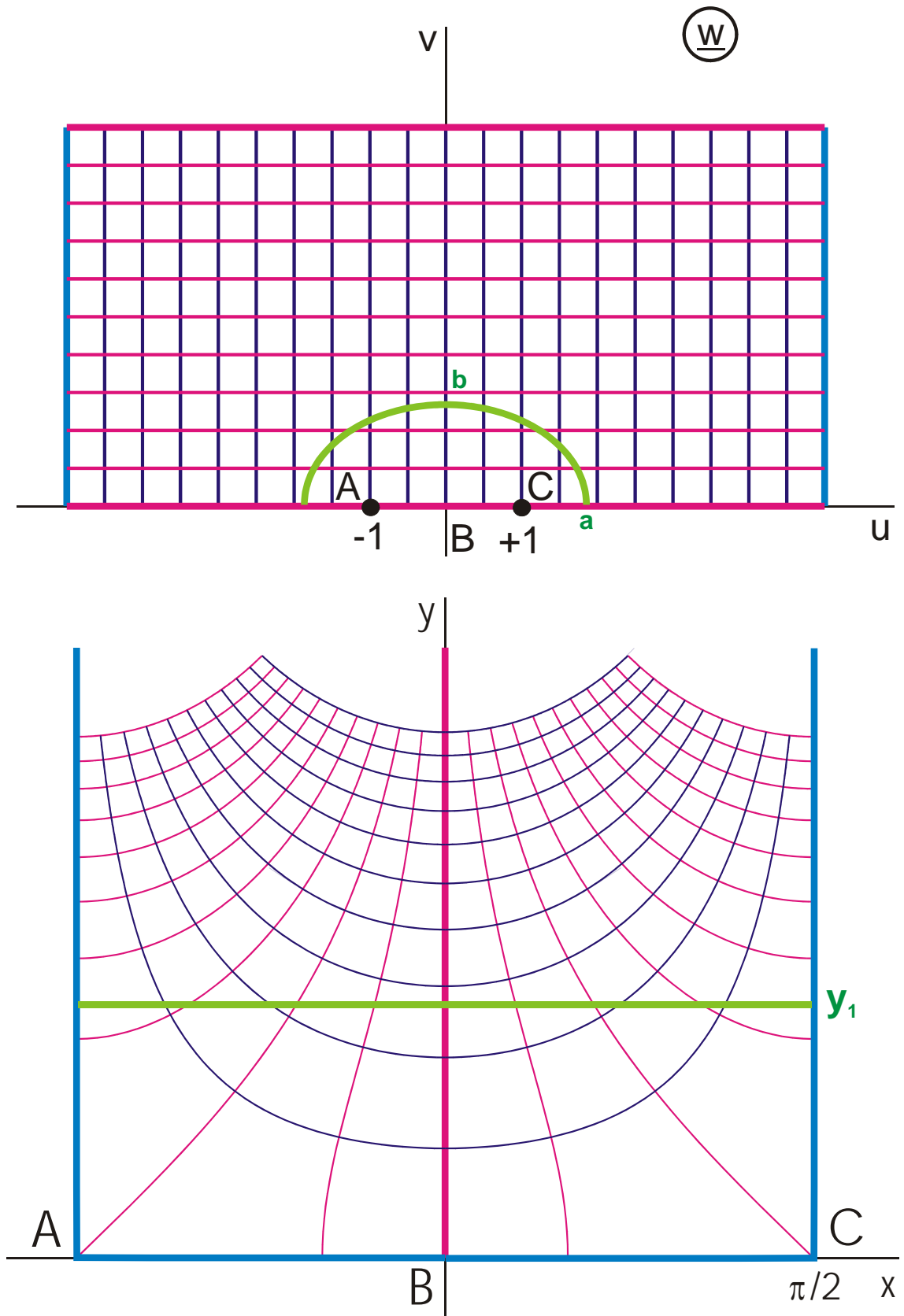
Eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \cosh y_1$ und $b = \sinh y_1$ wird auf die Geraden $\underline{z} = \pm y_1$ abgebildet.

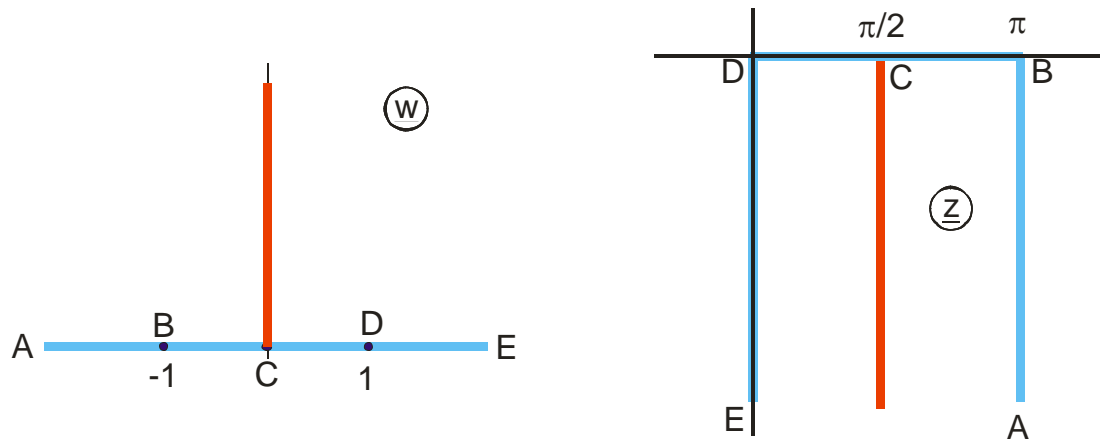
Die Funktionen $\underline{z} = \arccos \underline{w}$, $\underline{z} = \operatorname{arcosh} \underline{w}$ und $\underline{z} = \operatorname{arsinh} \underline{w}$ erzeugen topologisch gleichartige Abbildungen (Bild 2.5). Auch hier wird jeweils eine Halbebene zu einem Halbstreifen zusammengeklappt. Alle drei Funktionen lassen sich analog zu Gl. (6) durch den Logarithmus bzw. den Arkussinus darstellen.

$$\arccos \underline{w} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \underline{w} \quad (10)$$

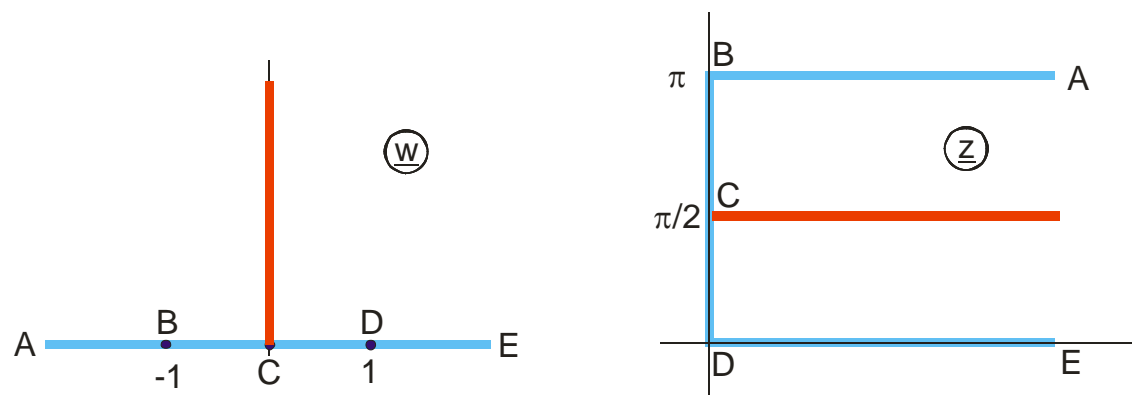
$$\operatorname{arsinh} \underline{w} = -j \arcsin(j\underline{w}) \quad (11)$$

$$\operatorname{arcosh} \underline{w} = -j \arcsin \underline{w} + j\pi / 2 \quad (12)$$

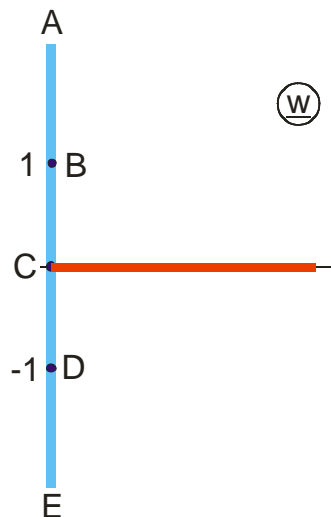
Bild 2.4: Die Abbildung $z = \arcsin w$, Abb. H 1.5



a) arccos



b) arcosh



c) arsinh

Bild 2.5: Die Abbildungen $\underline{z} = \arccos \underline{w}$, $\underline{z} = \operatorname{arcosh} \underline{w}$ und $\underline{z} = \operatorname{arsinh} \underline{w}$

2.5 Die Abbildung $\underline{z} = \sin \underline{w}$

Die Abbildungseigenschaften der Funktion $\sin \underline{w}$ ergeben sich unmittelbar aus Bild 2.4, da der Arkussinus die Umkehrfunktion ist. Insofern sind Bild 2.4 und Bild 2.6 gleich, abgesehen von der Vertauschung von w und z . Da der Sinus eine periodische Funktion ist, wird der Halbstreifen von $u = -\pi/2$ bis $u = +\pi/2$ auf die gesamte z -Ebene abgebildet. Jede horizontale Gerade bei $v = v_1$ wird auf eine halbe Ellipse mit den Halbachsen $a = \cosh v_1$ und $b = \sinh v_1$ abgebildet. Die Ellipsen sind konfokal mit den Brennpunkten bei $x = -1$ und $x = +1$. Alle vertikalen Linien in der w -Ebene werden auf konfokale Hyperbeln abgebildet. Die Brennpunkte liegen ebenfalls bei $x = \pm 1$ und die Scheitelpunkte bei $x = \pm \sin u_1$.

Die Funktionen $\underline{z} = \cos \underline{w}$, $\underline{z} = \sinh \underline{w}$ und $\underline{z} = \cosh \underline{w}$ liefern topologisch gleichartige Abbildungen. Sie lassen sich jeweils durch die Sinusfunktion darstellen:

$$\cos \underline{w} = \sin(\underline{w} + \pi/2) \quad (13)$$

$$\sinh \underline{w} = -j \sin(j\underline{w}) \quad (14)$$

$$\cosh \underline{w} = \sin(j\underline{w} + \pi/2). \quad (15)$$

Die Abbildungen ergeben sich aus Bild 2.5, indem man die Bezeichnungen w -Ebene und z -Ebene jeweils vertauscht.

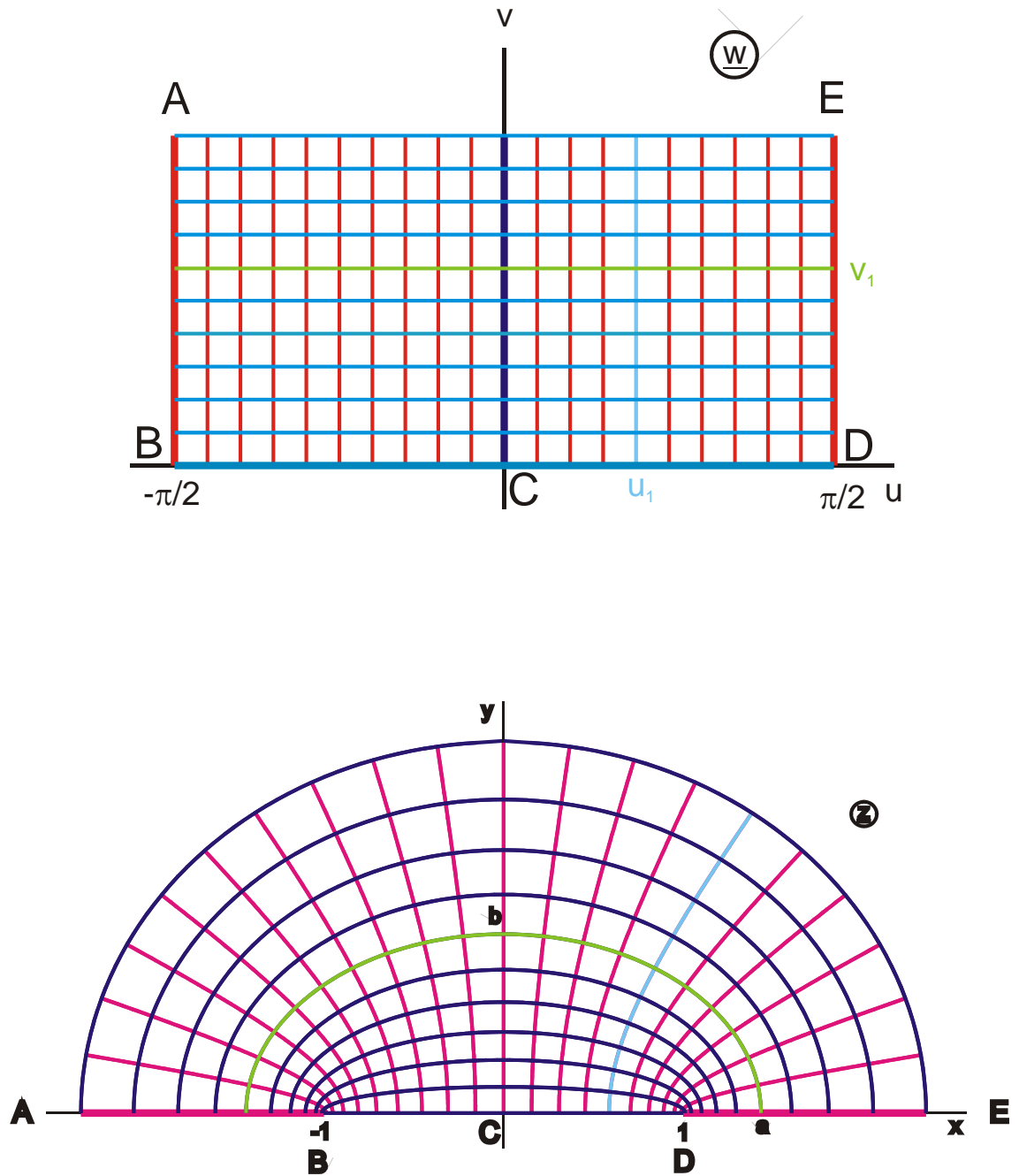


Bild 2.6: Die Abbildung $\underline{z} = \sin \underline{w}$.

2.6 Die Abbildung $\underline{z} = \tanh \underline{w}$

Der Parallelstreifen zwischen $v = -\pi/2$ und $v = +\pi/2$ wird auf die z -Ebene abgebildet. Dabei wandert der Punkt $u = +\infty$ nach $x = +1$ und $u = -\infty$ nach $x = -1$. Man kann sich das homogene Feld im Parallelstreifen entstanden denken als Feld zwischen einer positiven Linienladung $+\rho_L$ bei $u = +\infty$ und einer negativen Linienladung $-\rho_L$ bei $u = -\infty$ (Liniendipol im Punkt $\underline{w} = \infty$). Durch die Abbildung mit der Funktion $\tanh \underline{w}$ wandern diese beiden Linienladungen aufeinander zu und befinden sich dann in den Punkten $x = +1$ und $x = -1$. Das Feldbild in der z -Ebene ist also das Feld zweier gleich großer Linienladungen mit unterschiedlicher Polarität.

Die blauen Potentiallinien $u = u_1 = \text{const}$ sind in der Bildebene Kreise mit dem Radius

$$r_1 = (x_I - x_H) / 2 \quad (16)$$

und dem Mittelpunkt bei

$$x_M = r + x_H \quad (\text{Bild 2.7}). \quad (17)$$

Sie heißen Kreise des Apollonius.

Durch Einsetzen in die Abbildungsfunktion erhält man:

$$\text{Punkt I: } x_I = \tanh \underline{w}_I = \tanh(u_1 + j\pi/2) = 1 / \tanh u_1 \quad (18)$$

$$\text{Punkt H: } x_H = \tanh \underline{w}_H = \tanh u_1. \quad (19)$$

Damit ergibt sich

$$r_1 = (1 / \tanh u_1 - \tanh u_1) / 2 = 1 / \sinh(2 u_1) \quad (20)$$

$$r_M = (1 / \tanh u_1 + \tanh u_1) / 2 = 1 / \tanh(2 u_1). \quad (21)$$

Die roten Feldlinien $v = v_1 = \text{const}$ werden ebenfalls auf Kreise abgebildet. Ihr Radius

$$r_1 = (y_F - y_G) / 2 \quad (22)$$

und ihr Mittelpunkt

$$y_M = y_F - r_1 \quad (23)$$

ergeben sich analog durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte F und G in die Abbildungsfunktion:

$$\text{Punkt F: } j y_F = \tanh(j v_1) = j \tan v_1 \quad (24)$$

$$\text{Punkt G: } j y_G = \tanh(j v_1 - j\pi / 2) = -j / \tan v_1 \quad (25)$$

zu

$$r_1 = (\tan v_1 + 1 / \tan v_1) / 2 = 1 / \sin(2 v_1) \quad (26)$$

$$y_M = (\tan v_1 - 1 / \tan v_1) / 2 = -1 / \tan(2 v_1). \quad (27)$$

Die Geraden $v_1 = \pm\pi / 4$ gehen in den Einheitskreis über. Das Feldbild hat auch den Namen "bipolares Koordinatensystem".

Die Funktionen $\underline{z} = \tan \underline{w}$, $\underline{z} = \cot \underline{w}$ und $\underline{z} = \coth \underline{w}$ liefern topologisch gleichartige Abbildungen (Bild 2.8). Sie lassen sich jeweils durch den Tangenshyperbolicus ausdrücken:

$$\tan \underline{w} = -j \tanh (j\underline{w})$$

$$\cot \underline{w} = 1/\tan \underline{w}$$

$$\coth \underline{w} = 1/\tanh \underline{w}$$

Durch die Inversion beim \cot und \coth wird die Abbildung nicht verändert: Die Linienladungen bleiben bei ± 1 bzw. $\pm j$; die Punkte 0 und ∞ vertauschen ihre Plätze.

Eine Darstellung der w -Ebene und der z -Ebene wie in Bild 2.7 ist ausreichend, um die Funktion $\tanh \underline{w}$ vollständig zu beschreiben. Die z -Ebene gibt für jeden Punkt Betrag und Phase der Funktion $\tanh \underline{w}$ an. Für $\underline{w} = 0$ hat $\tanh \underline{w}$ eine Nullstelle (Punkt A). Für $\underline{w} = \pm\pi/2$ wird $\tanh \underline{w}$ unendlich. Die Funktion hat dort eine Polstelle (Punkt E, B). Diese Art der Darstellung einer Funktion mit einer komplexen Veränderlichen ist anschaulicher und übersichtlicher als die Reliefdarstellung, bei der in einem dreidimensionalen Bild der Betrag der Funktion als Höhe über der w -Ebene eingetragen wird. Die Phase der Funktion wird in dieses Relief meist als zusätzliches Gitternetz eingetragen.

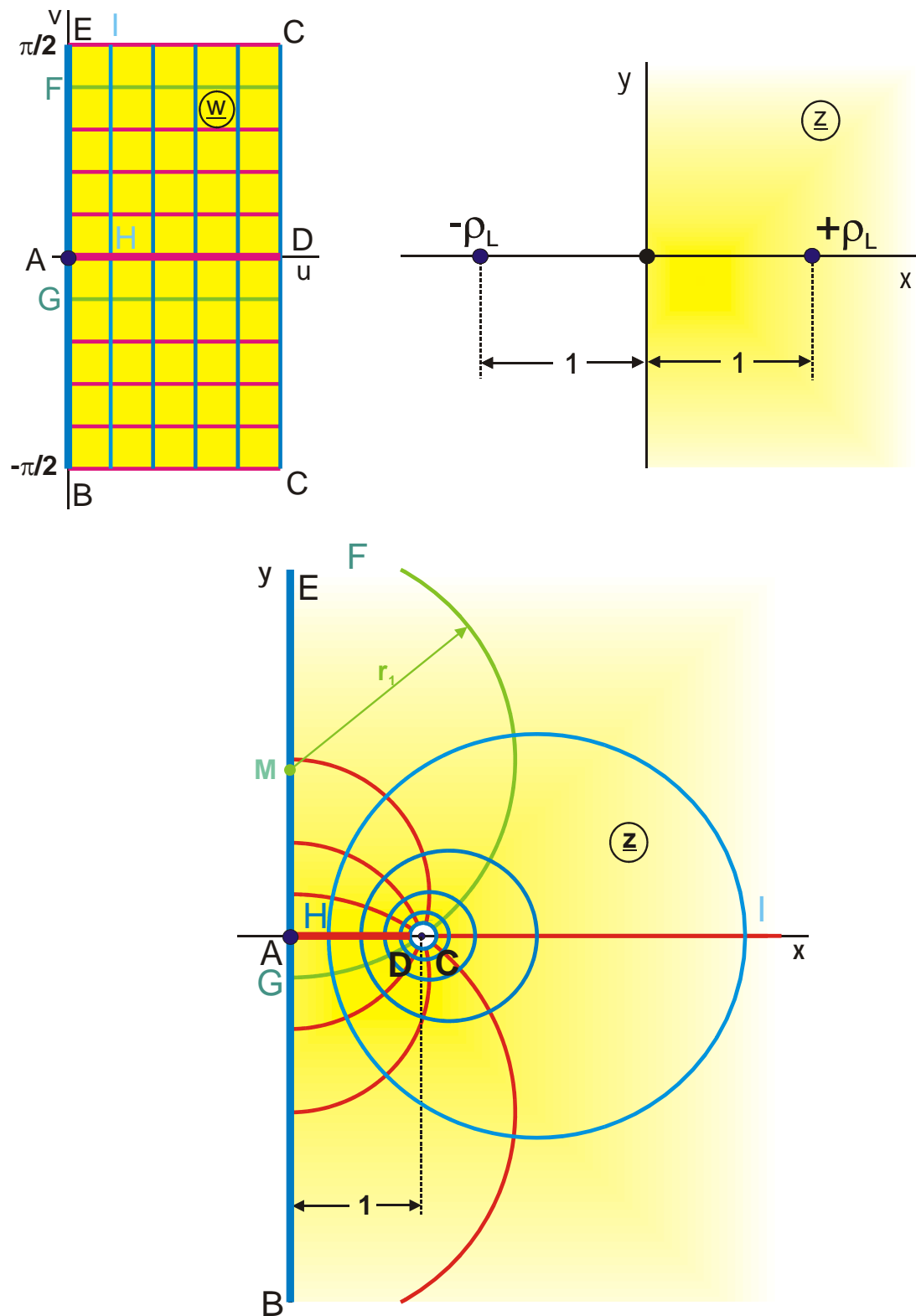


Bild 2.7: Die Abbildung $z = \tanh w$, Abb. E 1

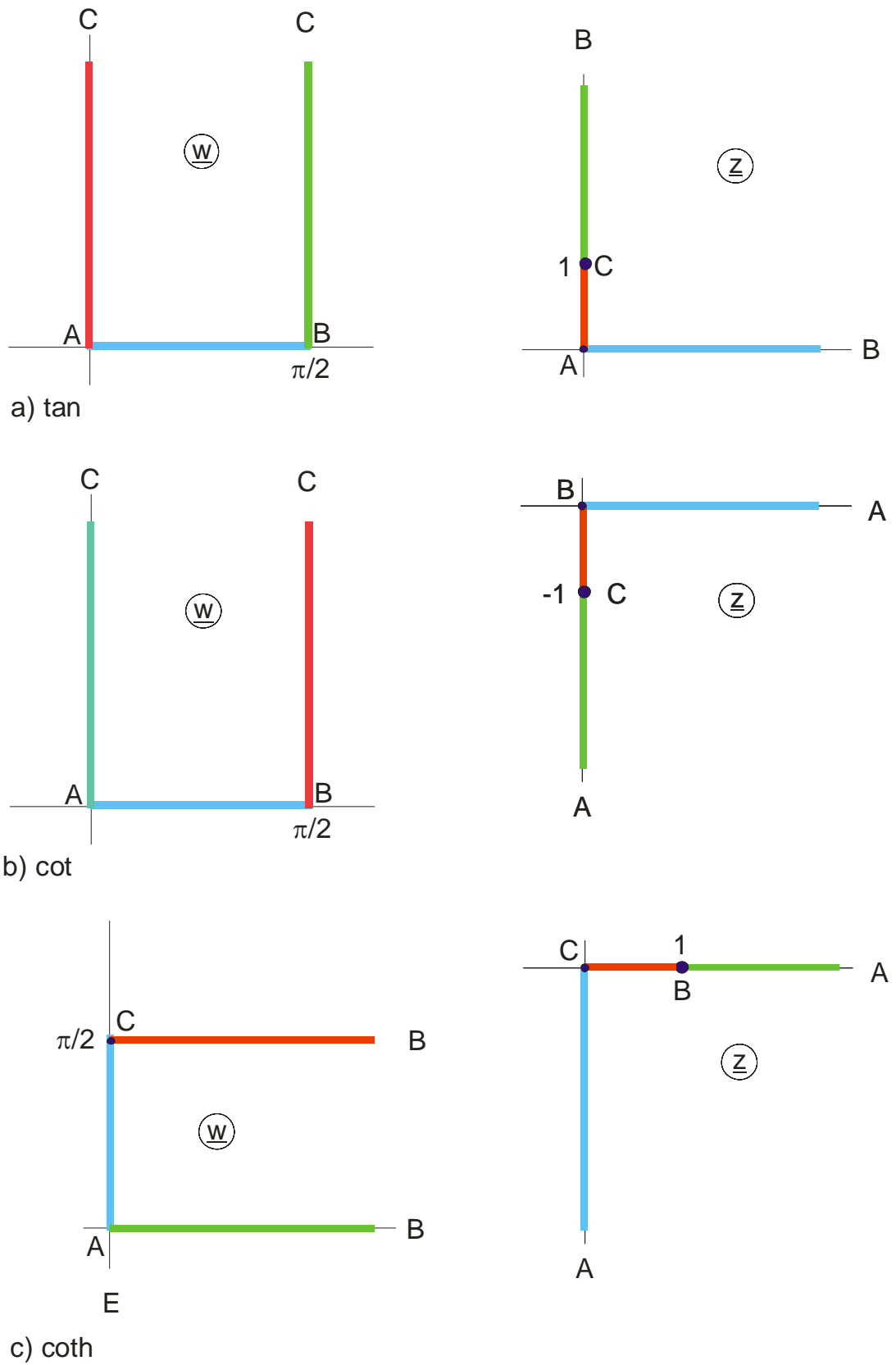


Bild 2.8: Die Abbildungen $\underline{z} = \tan \underline{w}$, $\underline{z} = \cot \underline{w}$ und $\underline{z} = \coth \underline{w}$

2.7 Die Abbildung $\underline{z} = 1 / \underline{w}$

Während mit der Funktion $\tanh \underline{w}$ die beiden Linienladungen bei $+\infty$ und bei $-\infty$, die das homogene Feld \underline{w} erzeugen, in die Punkte $+1$ und -1 abgebildet wurden, werden diese Linienladungen durch die Inversion $1/\underline{w}$ in den Nullpunkt abgebildet. Das Feld einer positiven und einer gleich großen negativen Linienladung im gleichen Punkt heißt Liniendipolfeld bzw. im folgenden verkürzt Dipolfeld. Da in diesem Buch nur zweidimensionale Felder betrachtet werden, ist die Verwechslung mit einem Punktdipolfeld (das ein anderes Feldbild hat) nicht möglich.

Bild 2.9d zeigt das im folgenden verwendete Symbol für ein Dipolfeld, zwei kleine Kreise, angeordnet wie eine Acht, hier im Nullpunkt der z -Ebene. Das damit gekennzeichnete Dipolfeld entsteht aus dem Feld zweier gleich großer Linienladungen entgegengesetzter Polarität, die auf der imaginären Achse symmetrisch angeordnet sind, wenn deren Abstand d gegen Null geht (Bild 2.9c).

In der technischen Anwendung ist ein Dipolfeld das Fernfeld zweier Linienladungen wie in Bild 2.9c bzw. das Fernfeld einer Zweidrahtleitung, d.h. eine Näherung für die Funktion $\underline{z} = j \tanh \underline{w}$ in den Bereichen der z -Ebene, in denen $|\underline{z}| \gg d$ gilt, also in großer Entfernung von beiden Linienladungen.

Das Feldbild (Bild 2.9b) besteht aus orthogonalen Kreisen, die alle durch den Nullpunkt der z -Ebene gehen. Der Punkt $\underline{w} = 1$ wird in den Punkt $\underline{z} = 1$ abgebildet. Eine rote Gerade $u_1 = \text{const}$ wird abgebildet auf einen roten Kreis, der bei $1/u_1$ durch die reelle

Achse läuft. Sein Mittelpunkt ist also bei $1/(2u_1)$. In gleicher Weise werden alle blauen Geraden $v_1 = \text{const}$ auf blaue Kreise abgebildet. Wegen

$$\underline{z} = 1/\underline{w} = \frac{1}{w \cdot \exp(j\varphi)} = \frac{1}{w} \exp(-j\varphi) \quad (28)$$

wird der I. Quadrant der w -Ebene auf den IV. Quadranten der z -Ebene abgebildet und umgekehrt. Der Einheitskreis in der w -Ebene wird auf den Einheitskreis in der z -Ebene abgebildet. Lediglich der Umlaufsinn kehrt sich dabei um. Das Feldbild in der z -Ebene entspricht der Rückseite der komplexen Zahlenkugel, d.h. es ist eine Draufsicht auf den Punkt ∞ .

Die bilineare Transformation (Möbius-Transformation) bzw. die Abbildung mit einer gebrochen linearen Funktion

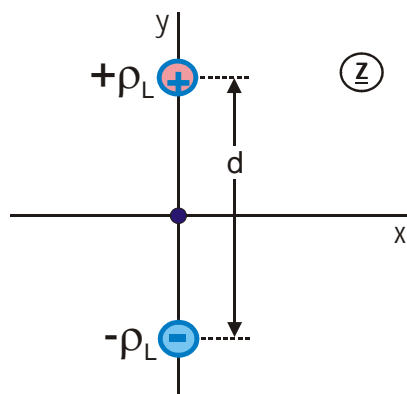
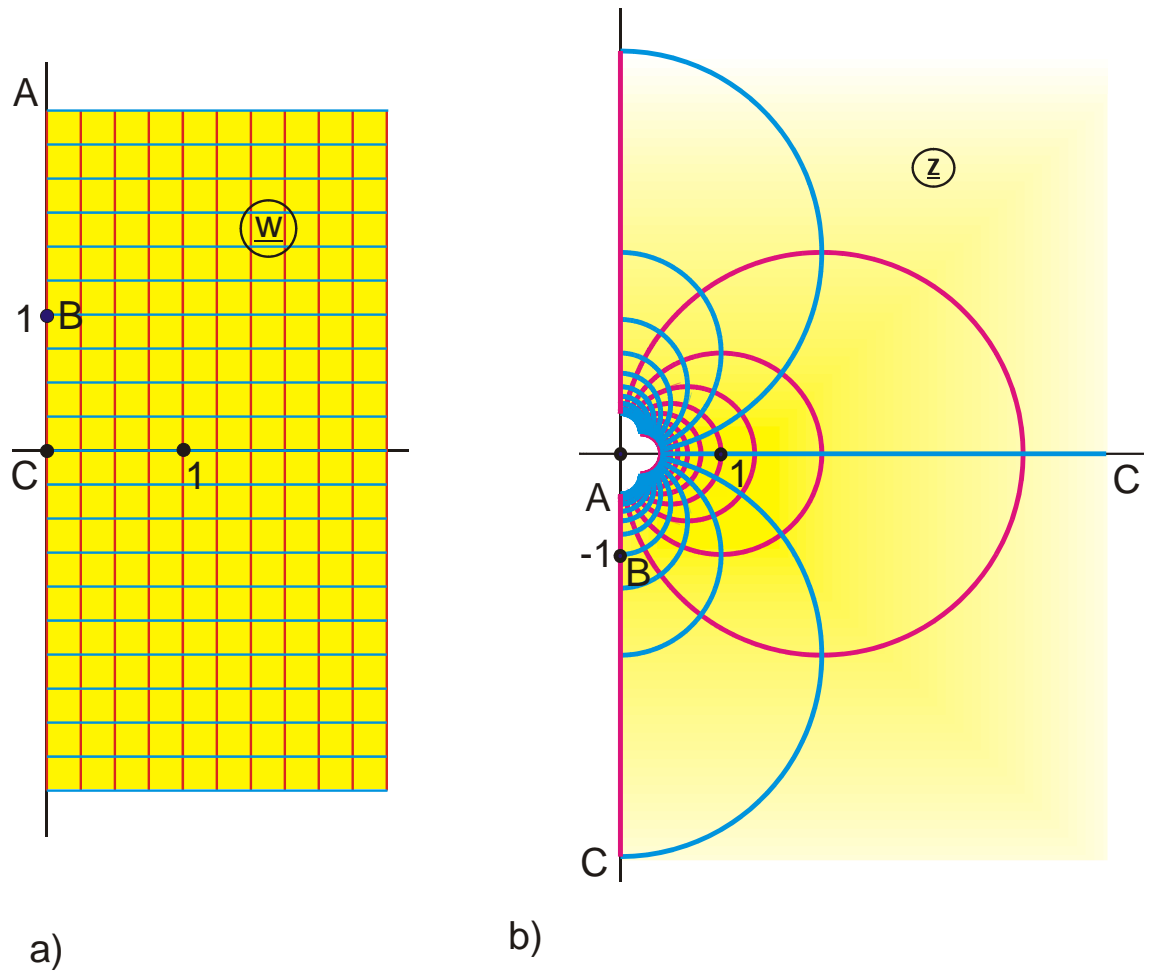
$$\underline{z} = \frac{a\underline{w} + b}{c\underline{w} + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0 \quad (29)$$

mit beliebigen komplexen Konstanten a , b , c und d , die häufig auch in der Form

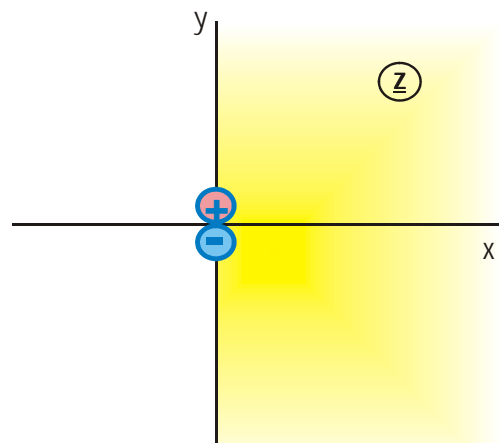
$$\underline{z} = \frac{\underline{w} + 1}{\underline{w} - 1} \quad (30)$$

oder
$$\underline{z} = \frac{\underline{w} + j}{\underline{w} - j} \quad (31)$$

auftritt, ergibt topologisch das gleiche Feldbild wie die Inversion $\underline{z} = 1/\underline{w}$. Die Konstanten bewirken lediglich eine Vergrößerung/Verkleinerung, eine Drehung bzw. eine Verschiebung des Koordinatensystems. Beispiele: Gebietsabbildungen: 7, 8, 24, 25, 26, 31, 32 in 6.8 und Beispiel 6.8.



c) Dipol aus Linienladungen

d) Symbol für das Dipolfeld in c)
für $d \rightarrow 0$ **Bild 2.9: Die Abbildung $z = 1/\underline{w}$, Abb. Q 1**

3. Überlagerung komplexer Potentiale

Die \underline{w} -Ebene ist die Ebene des komplexen Potentials \underline{w} . Die reelle Potentialverteilung (Spannungsverteilung) einer gegebenen technischen Aufgabenstellung, deren Geometrie in der \underline{z} -Ebene vorliegt, ergibt sich daraus als Realteil $u(\underline{z})$ bzw. als Imaginärteil $v(\underline{z})$. Das für reelle Potentiale gültige Superpositionsgesetz gilt in gleicher Weise für komplexe Potentiale: Das Gesamtpotential \underline{w} ergibt sich als Summe der Potentialanteile aller Quellen, die in der \underline{z} -Ebene vorhanden sind. Für die Überlagerung geeignete einfache Quellen sind:

Tabelle 3.1: Komplexe Darstellung elementarer Potentialquellen

Quelle	Potential
homogenes Feld	$\underline{w} = a_o \underline{z} \quad (1)$
um den Winkel φ_o gedrehtes homogenes Feld (schräge Strömung)	$\underline{w} = a_o \cdot \underline{z} \cdot \exp(-j \varphi_o) \quad (2)$
Linienladung bei \underline{z}_o	$\underline{w} = a_o \cdot \ln(\underline{z} - \underline{z}_o) \quad (3)$
Liniendipol bei \underline{z}_o	$\underline{w} = \frac{a_o}{\underline{z} - \underline{z}_o} \quad (4)$
um den Winkel φ_o gedrehter Liniendipol bei \underline{z}_o	$\underline{w} = \frac{a_o}{\underline{z} - \underline{z}_o} \cdot \exp(j \varphi_o) \quad (5)$

Sofern in der \underline{z} -Ebene n Quellen mit der Amplitude a_i an den Orten \underline{z}_i gegeben sind, ergibt sich das Gesamtpotential \underline{w} der Anordnung als Summe der Potentialanteile \underline{w}_i aller Quellen.

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^n \underline{w}_i(\underline{z}) \quad (6)$$

Die Überlagerung von Potentialfeldern \underline{w}_i ist dann und nur dann zulässig, wenn alle Felder \underline{w}_i die gleichen Randbedingungen erfüllen (singuläre Punkte ausgenommen). Da Linienladungen und Liniendipole ihren Ursprung in singulären Punkten haben, können ihre Felder superponiert werden. **Potentialfelder** dagegen, die **von räumlich ausgedehnten Elektroden** ausgehen, die sich an unterschiedlichen Stellen \underline{z}_i befinden, **lassen sich** also **nicht überlagern**. Das Potentialfeld eines Leiterstreifens am Ort \underline{z}_1 und das Potentialfeld eines Zylinders am Ort \underline{z} sind nicht superponierbar, da das Feld des Leiterstreifens am Ort der Zylinderoberfläche keine Äquipotentialfläche aufweist und da das Feld des Zylinders am Ort des Leiterstreifens ebenfalls keine Äquipotentialfläche aufweist. Damit verbleiben nur die in Gl. (1) bis (5) angeführten einfachen Quellen für die Methode der Überlagerung komplexer Potentiale.

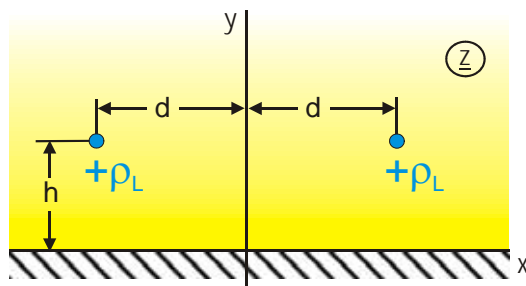
Mit Gl. (6) kann man also das Potential aller Anordnungen berechnen, die aus einem homogenen Feld und aus Linienladungen und/oder Liniendipolen bestehen. Das dazugehörige Feldbild $\underline{z} = f(\underline{w})$ ergibt sich, indem die Potentialfunktion $\underline{w} = f(\underline{z})$ {Gl. (6)} nach \underline{z} aufgelöst wird. In den vielen Fällen, in denen es nicht möglich ist, diese Gleichung für das Feldbild explizit anzugeben, können numerische Verfahren zur Linienverfolgung eingesetzt werden, um das Feldbild dennoch zeichnen zu können.

Die Vorgehensweise bei der Anwendung der Methode der Überlagerung komplexer Potentiale sei an einigen einfachen Beispielen demonstriert:

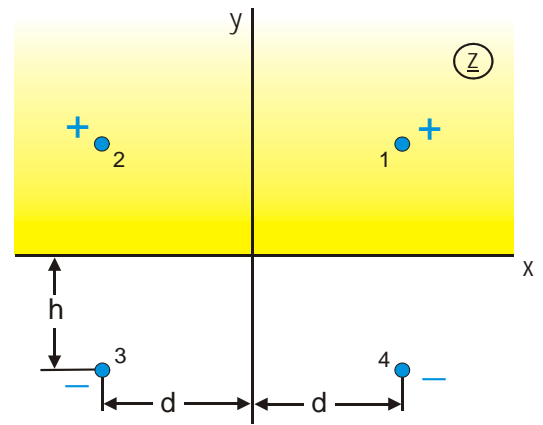
Beispiel 1: Zwei gleichnamige, gleichgroße Linienladungen über einer leitenden Ebene.

Bild 3.1a zeigt die Geometrie der Anordnung. Nach dem Spiegelungsprinzip wird die leitende Ebene ersetzt durch die beiden Spiegelbilder der Linienladungen im oberen Halbraum (Bild 3.1b). In jedem Punkt (x, y) der z -Ebene ergibt sich das komplexe Potential \underline{w} als Summe der Potentialanteile der 4 Linienladungen:

$$\underline{w} = a_1 \cdot \ln(z - z_1) + a_2 \cdot \ln(z - z_2) + a_3 \cdot \ln(z - z_3) + a_4 \cdot \ln(z - z_4) \quad (7)$$



a) Ausgangsproblem: 2 gleichnamige Linienladungen über einer leitenden Ebene



b) Ersatz der leitenden Ebene durch 2 Spiegelladungen

Bild 3.1: Beispiel 1

Da alle vier Linienladungen gleich groß sind, sind die Beträge von a_1 bis a_4 gleich groß. Sie werden gleich 1 gewählt. Die Linienladungen 1 und 2 sind positiv, damit wird $a_1 = a_2 = 1$. Die restlichen beiden sind negativ, damit wird $a_3 = a_4 = -1$. Die Orte z_1 bis z_4 ergeben sich unmittelbar aus Bild 1b.

$$\underline{w} = \ln[z - (d + jh)] + \ln[z - (-d + jh)] - \ln[z - (-d - jh)] - \ln[z - (d - jh)] \quad (8)$$

$$\underline{w} = \ln \left[\frac{[z - (d + jh)][z - (-d + jh)]}{[z + (d + jh)][z + (-d + jh)]} \right] \quad (9)$$

Mit Gl. (9) lässt sich das Potential in jedem Punkt der x-y-Ebene berechnen.

Das Feldbild der Anordnung ergibt sich durch Auflösen nach \underline{z} (Abb. L 2):

$$\underline{z} = -jh \frac{1 + \exp(\underline{w})}{1 - \exp(\underline{w})} \pm \sqrt{d^2 + h^2 \left[1 - \left(\frac{1 + \exp(\underline{w})}{1 - \exp(\underline{w})} \right)^2 \right]} \quad (10)$$

Beispiel 2: Zwei ungleichnamige Linienladungen unterschiedlicher Größe.

Für eine negative Linienladung bei $x = +1$ und eine um den Faktor σ größere Linienladung entgegengesetzten Vorzeichens im Koordinatenursprung (Bild 3.2) ergibt sich das komplexe Potential zu:

$$\underline{w} = \sigma \ln \underline{z} - \ln(\underline{z} - 1) \quad (11)$$

$$\underline{w} = \ln \frac{\underline{z}^\sigma}{\underline{z} - 1} \quad (12)$$

Für $\sigma = 2$ läßt sich die Gleichung nach \underline{z} auflösen. Das Feldbild dieser Anordnung wird damit (Abb. L 3):

$$\underline{z} = \frac{\exp(\underline{w})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\exp(\underline{w})}{2} \right)^2 - \exp(\underline{w})} \quad (13)$$

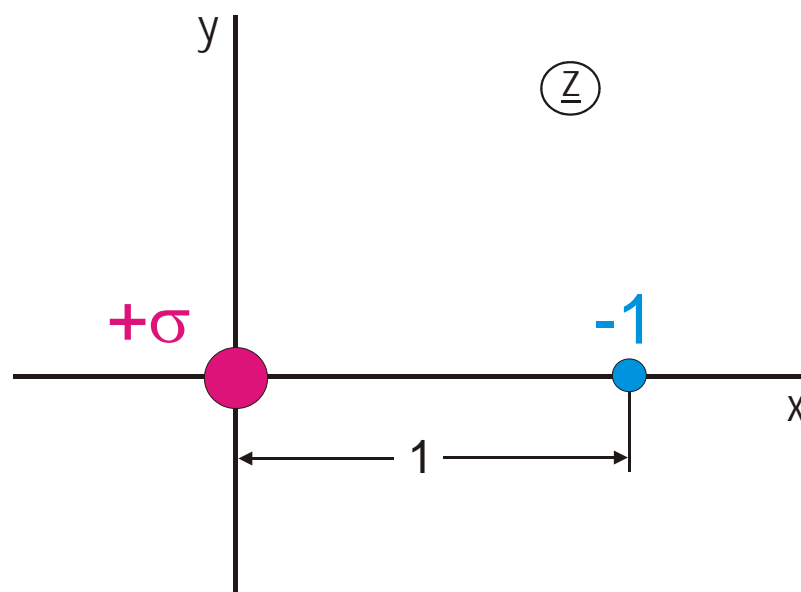


Bild 3.2: Beispiel 2

Beispiel 3: Zwei gleichnamige, gleichgroße Liniendipole.

Zwei gleichgerichtete Dipole befinden sich jeweils bei $x = +a$ und $x = -a$ (Bild 3.3). Für das Potential \underline{w} ergibt sich durch Überlagerung:

$$\underline{w} = \frac{1}{\underline{z} + a} + \frac{1}{\underline{z} - a} \quad (14)$$

$$\underline{w} = \frac{2\underline{z}}{\underline{z}^2 - a^2} \quad (15)$$

Das dazugehörige Feldbild ist dann (Abb. Q 2.1):

$$\underline{z} = \frac{1}{\underline{w}} \pm \sqrt{\frac{1}{\underline{w}^2} + a^2} \quad (16)$$

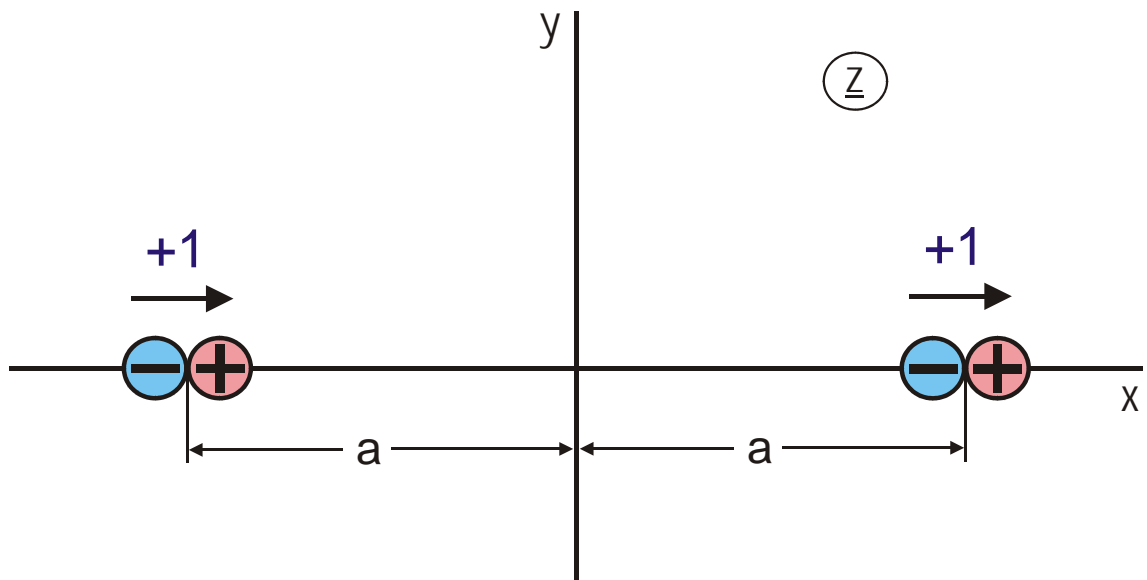


Bild 3.3: Beispiel 3

Beispiel 4: Leitender Zylinder im homogenen Feld.

Das Feld eines leitenden Zylinders im homogenen elektrostatischen Feld ergibt sich durch die Überlagerung eines Dipolfeldes und eines homogenen Feldes (Bild 3.4).

Das dazugehörige komplexe Potential lautet:

$$\underline{w} = \underline{z} + 1/\underline{z} \quad (17)$$

Durch Auflösen nach \underline{z} ergibt sich das Feldbild:

$$\underline{z} = \frac{\underline{w}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{w}}{2}\right)^2 - 1}. \quad (18)$$

Da das Koordinatennetz in der \underline{w} -Ebene beliebig skaliert werden kann, ändert sich die Abbildung nicht, wenn $\underline{w}/2$ durch \underline{w} ersetzt wird. Damit ergibt sich als Lösung (Abb. A 3)

$$\underline{z} = \underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1}. \quad (19)$$

Im resultierenden Feldbild wird der Einheitskreis eine Äquipotentiallinie. Außen ergibt sich in weiter Entfernung ein homogenes Feld; innen im Zentrum das Dipolfeld.

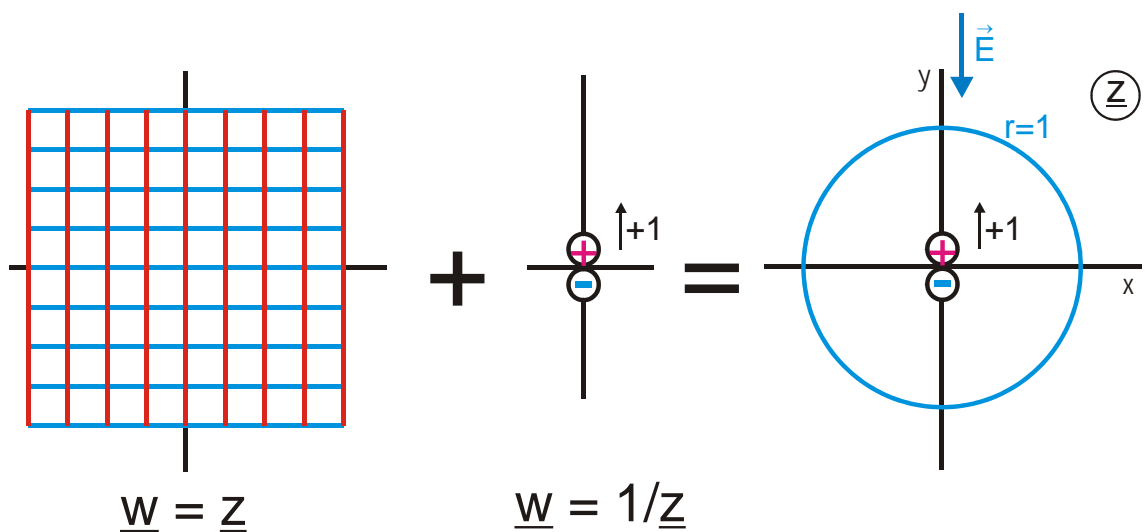
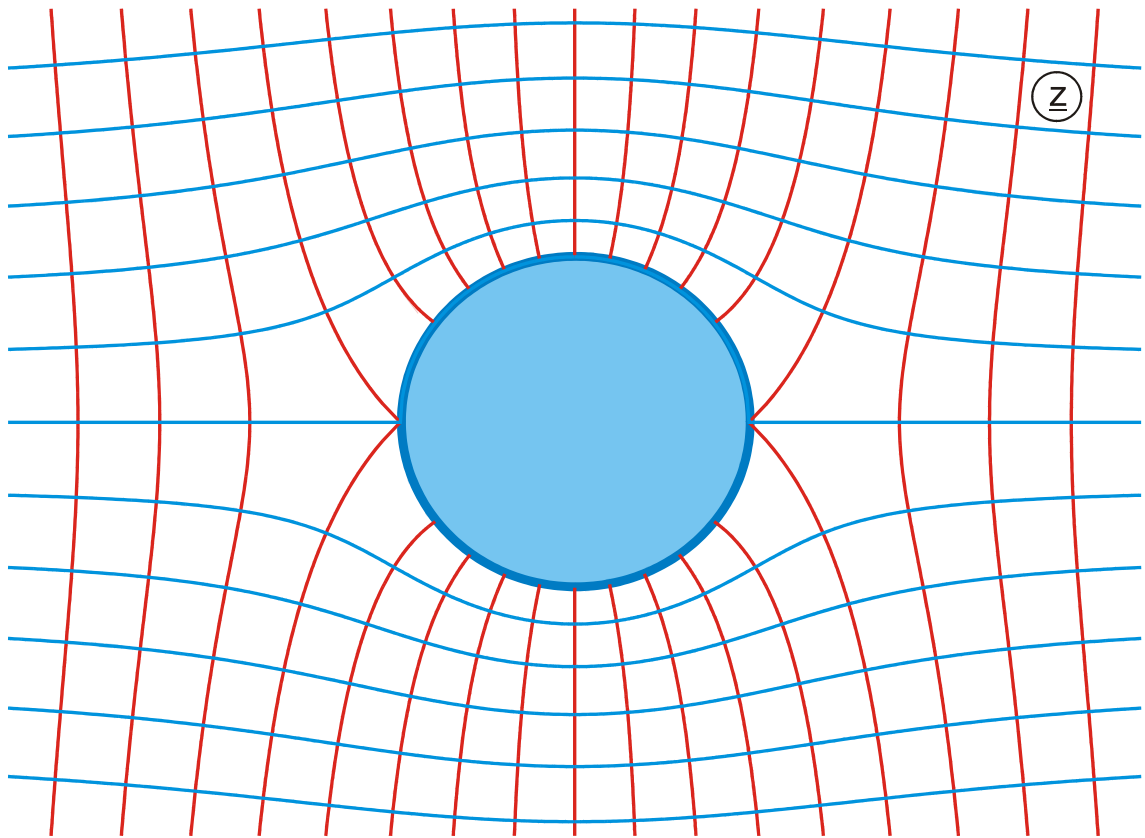
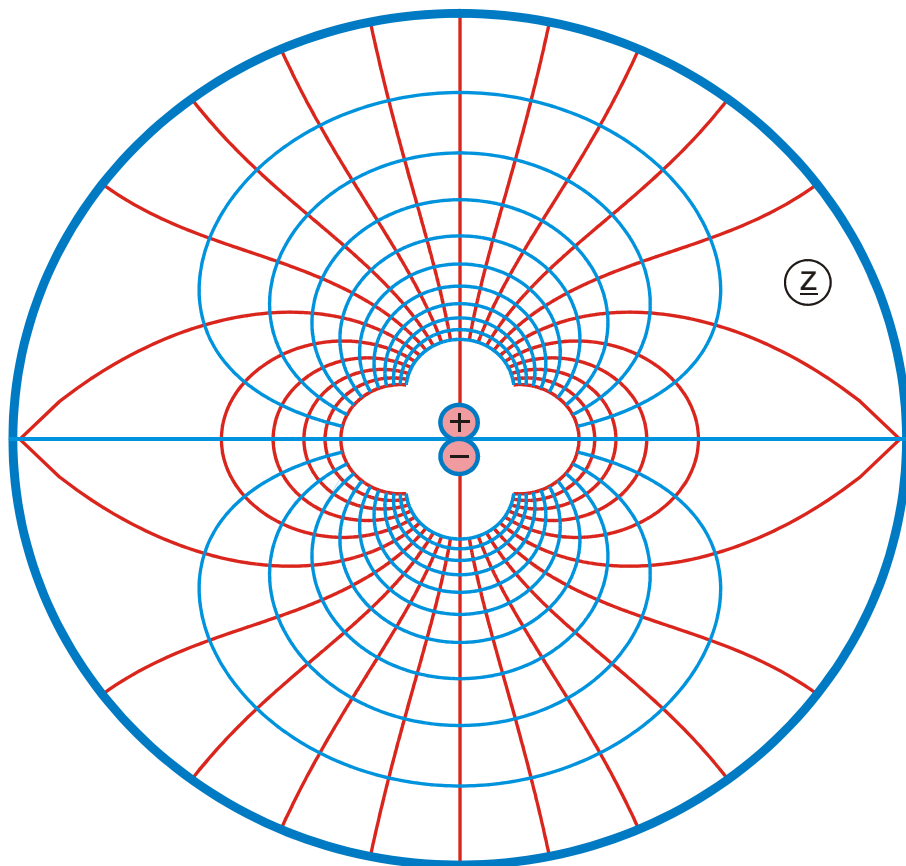


Bild 3.4: Beispiel 4



a)



b)

Bild 3.5: Außenfeld a) und Innenfeld b) des leitenden Zylinders von Beispiel 4

4. Polygonabbildungen

Gesucht ist das Feldbild im Inneren eines geschlossenen Polygonzuges (Bild 4.1b). Dabei ist es zulässig, daß eine Ecke oder mehrere Ecken des Polygons im Unendlichen liegen (Bild 4.1c, d). In der Sprache der konformen Abbildung heißt dies: Gesucht ist die analytische Funktion $\underline{z} = f(\underline{w})$, die das homogene Feld in der oberen w -Ebene auf das Innere des Polygons abbildet. Bei dieser Abbildung geht die reelle Achse der w -Ebene über in die Berandung des Polygons.

Bei offenen Polygonzügen wie z.B. in Bild 4.1c ergibt sich die Frage, ob sich das so berechnete Feldbild oberhalb oder unterhalb des Polygonzuges befindet. Die Antwort folgt aus dem Satz, daß bei konformen Abbildungen der Umlaufsinn erhalten bleibt (Kap.1): Geht man von A nach B, so befindet sich das homogene Feld links von der Geraden \overline{AB} . Folgerichtig befindet sich das berechnete Feldbild in der Bildebene ebenfalls links von der Geraden \overline{AB} , wenn man dort von A nach B geht.

Entsprechend der Lage des Koordinatensystems sind die Potentiallinien die Linien $v = \text{const}$. Die gesuchte Potentialverteilung in der z -Ebene heißt $v(x, y)$. Damit ergibt sich die elektrische Feldstärke in der z -Ebene zu

$$\vec{E} = -\text{grad } v(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y. \quad (1)$$

Der Betrag der Feldstärke ist:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \left| \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right|. \quad (2)$$

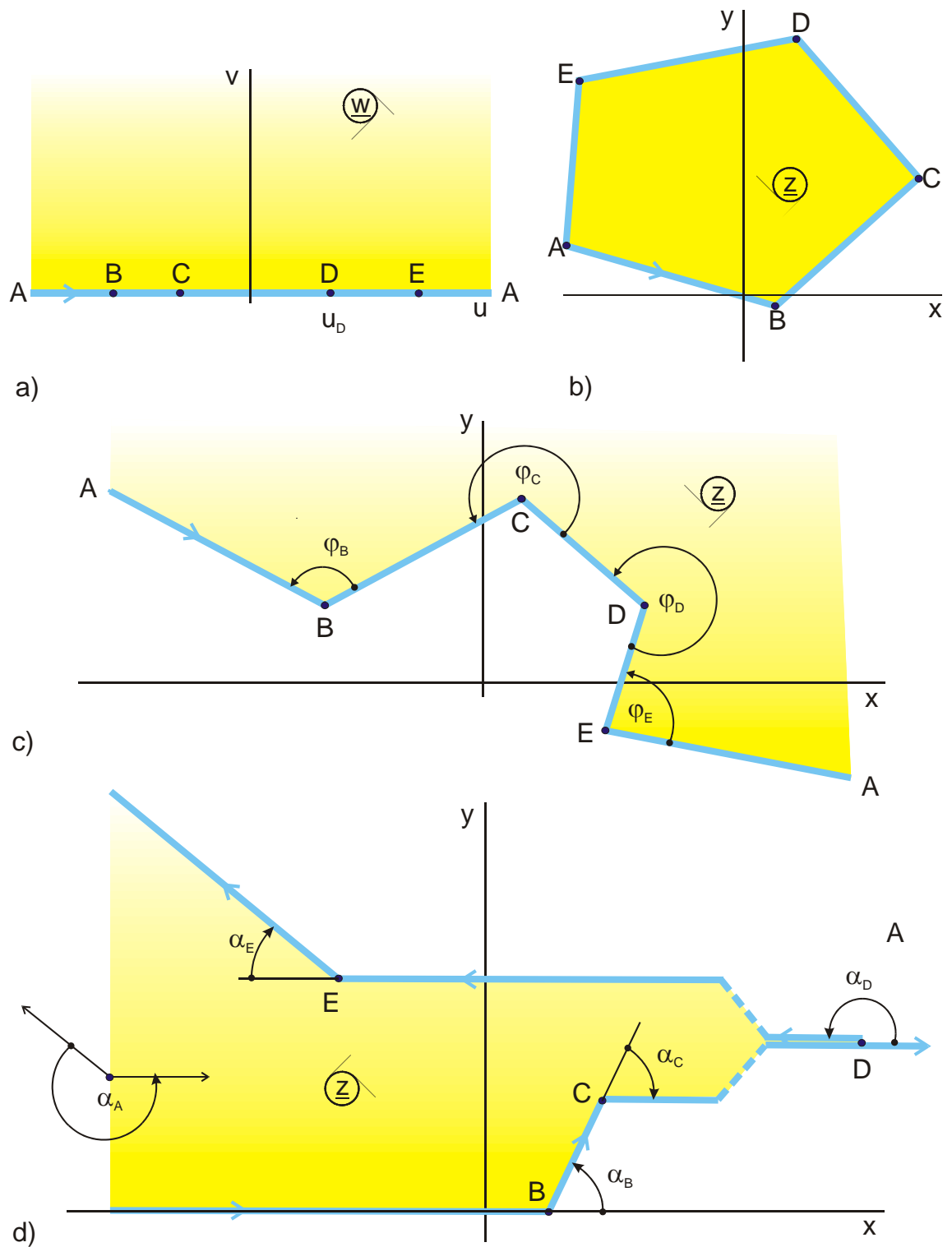


Bild 4.1: Abbildung der oberen Halbebene auf das Innere eines Polygons

Da die elektrische Feldstärke E auf einer Leiteroberfläche an einer Außenecke ($\varphi > \pi$) unendlich groß wird und in einer einspringenden Ecke ($\varphi < \pi$) verschwindet, ergibt sich für die Kontur in Bild 4.1c:

$$\text{Punkt C:} \quad \varphi > \pi \Rightarrow E_C = \infty$$

$$\text{Punkt D:} \quad \varphi > \pi \Rightarrow E_D = \infty$$

$$\text{Punkt B:} \quad \varphi < \pi \Rightarrow E_B = 0$$

$$\text{Punkt E:} \quad \varphi < \pi \Rightarrow E_E = 0 .$$

Damit muß sich die Funktion $d\underline{w} / d\underline{z}$ darstellen lassen in der Form

$$\frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = f_1 \left(\frac{(\underline{w} - u_B)(\underline{w} - u_E)}{(\underline{w} - u_C)(\underline{w} - u_D)} \right) \quad (3)$$

mit Nullstellen bei $\underline{w} = u_B$ und $\underline{w} = u_E$ und Polen bei $\underline{w} = u_C$ und $\underline{w} = u_D$. Als Kehrwert dieser Funktion ergibt sich:

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = f_2 \left(\frac{(\underline{w} - u_C)(\underline{w} - u_D)}{(\underline{w} - u_B)(\underline{w} - u_E)} \right) . \quad (4)$$

In Kapitel 2 wurde gezeigt, daß die Funktion $\underline{z} = \underline{w}^{\varphi/\pi}$ einen Knick mit dem Innenwinkel φ im Koordinatennullpunkt hervorruft. Da Feldbilder beliebig gedreht und verschoben werden können, gilt dies auch allgemein für einen Knick der Berandung in einem beliebigen Punkt B (Bild 4.2). Aus

$$\underline{z} = (\underline{w} - u_B)^{\varphi_B/\pi} \quad (5)$$

folgt

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = \frac{\varphi_B}{\pi} (\underline{w} - u_B)^{\varphi_B/\pi - 1} . \quad (6)$$

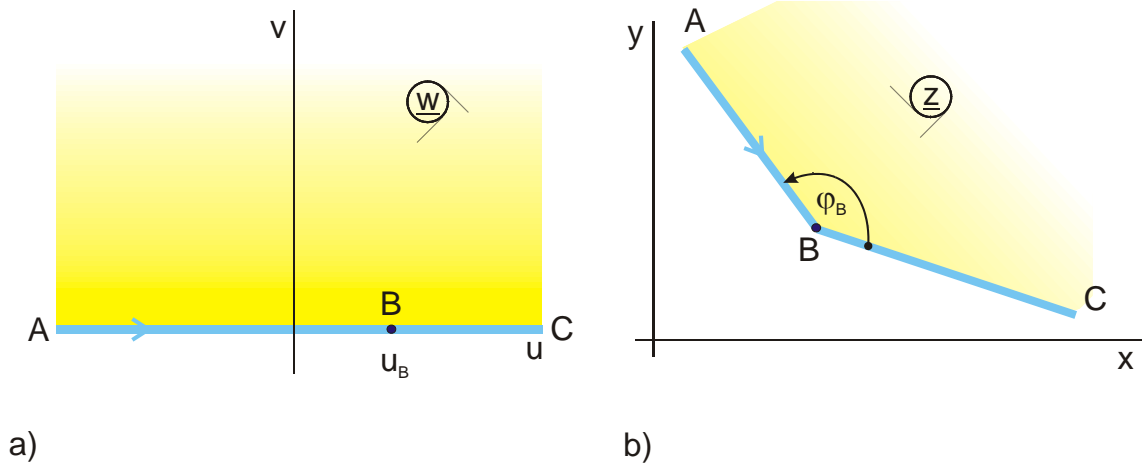


Bild 4.2: Die Abbildung $\underline{z} = (\underline{w} - \underline{u}_B)^{\varphi_B / \pi}$

Die gesuchte Funktion $d\underline{z} / d\underline{w}$ lautet damit offensichtlich für das Beispiel in Bild 4.1c

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = \underline{A} \frac{(\underline{w} - \underline{u}_C)^{\varphi_C / \pi - 1} (\underline{w} - \underline{u}_D)^{\varphi_D / \pi - 1}}{(\underline{w} - \underline{u}_B)^{1 - \varphi_C / \pi} (\underline{w} - \underline{u}_E)^{1 - \varphi_E / \pi}} \quad (7)$$

Im Zähler stehen alle Punkte, in denen die Feldstärke unendlich groß wird ($\varphi > \pi$, herausstehende Ecke) und im Nenner alle Punkte, in denen die Feldstärke verschwindet ($\varphi < \pi$, einspringende Ecke: $\varphi / \pi - 1 < 0$). Durch Integration von Gl. (7) ergibt sich die gesuchte Abbildungsfunktion $\underline{z} = f(\underline{w})$.

Der im vorangegangenen anschaulich dargestellte Zusammenhang lässt sich auch mathematisch exakt ableiten und beweisen (z.B. [6, 15]).

Für die Abbildung der oberen w -Halbebene auf das Innere eines polygonal berandeten Gebiets mit n Ecken in der z -Ebene gilt:

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = \prod_{i=1}^n (\underline{w} - \underline{u}_i)^{\varphi_i / \pi - 1}. \quad (8)$$

Die dazugehörige Abbildungsfunktion lautet:

$$\underline{z} = \underline{B} \int_0^{\underline{w}} \prod_{i=1}^n (\underline{w} - u_i)^{\varphi_i/\pi-1} d\underline{w} + \underline{C}. \quad (9)$$

Da die Konstanten \underline{B} und \underline{C} das Feldbild nicht verändern und somit für praktische Probleme beliebig gewählt werden können gilt:

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \prod_{i=1}^n (\underline{w} - u_i)^{\varphi_i/\pi-1} d\underline{w} . \quad (10)$$

Da dieses Buch für Ingenieure geschrieben wurde und nicht für Mathematiker, wurde der Übersichtlichkeit wegen der gleiche Buchstabe \underline{w} sowohl für die Variable als auch für die Integrationsobergrenze benutzt.

Falls ein Punkt im Unendlichen liegt ($u_i = \infty$), wie z.B. Punkt A in Bild 4.1a, so entfällt der dazugehörige Term. Die Winkel φ_i sind die Innenwinkel des Polygons. Sie liegen im Inneren des Feldbildes. Punkte mit $u_i \neq \infty$, die in der Bildebene bei ∞ liegen (z.B. Punkt D in Bild 4.1d) müssen selbstverständlich ebenfalls berücksichtigt werden. Für zwei parallele Geraden, wie in Punkt D, Bild 4.1d, gilt $\varphi_D = 0$.

Da die Summe der Innenwinkel eines geschlossenen Polygons $\pi (n-2)$ beträgt, kann man zur Kontrolle heranziehen:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i = \pi(n-2) \quad (11)$$

Anstatt die Innenwinkel φ_i zu benutzen, ist es in der Praxis einfacher, mit den Drehwinkeln α_i zu rechnen.

$$\varphi_i/\pi - 1 = -\alpha_i/\pi \quad (12)$$

Da die gesamte Richtungsänderung beim Umfahren eines geschlossenen Gebiets 360° beträgt, gilt für die Summe der Drehwinkel α_i :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi . \quad (13)$$

Durchläuft man die Randkurve in der z -Ebene so, daß das Feldbild links liegt, so ist α_i der Winkel, um den man im Punkt i die Laufrichtung ändern muß (Bild 4.1d). Winkel wie α_E , die im mathematisch negativen Sinn drehen, werden mit negativem Vorzeichen in Gl. (14) eingesetzt. Damit kommen wieder alle herausragenden Ecken mit $E_i = \infty$ in den Zähler des Integrals. Gleichung 8 erhält damit die Form

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(\underline{w} - u_i)^{\alpha_i/\pi}} . \quad (14)$$

und Gl.10 wird

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{\prod_{i=1}^n (\underline{w} - u_i)^{\alpha_i/\pi}} . \quad (15)$$

Nach den beiden Mathematikern, die Gl. (9) unabhängig voneinander angegeben haben, heißt dieser Weg zur Berechnung der Abbildungsfunktion "Schwarz-Christoffel-Transformation"

Für die Abbildung der oberen w -Halbebene auf das Äußere eines Polygons (Bild 4.3) gilt:

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \prod_{i=1}^n (\underline{w} - u_i)^{\varphi_i/\pi-1} \frac{d\underline{w}}{(\underline{w} - \underline{w}_\infty)^2 (\underline{w} - \underline{w}_\infty^*)^2} \quad (16)$$

bzw.

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{\prod_{i=1}^n (\underline{w} - u_i)^{\alpha_i/\pi} \cdot (\underline{w} - \underline{w}_\infty)^2 (\underline{w} - \underline{w}_\infty^*)^2} . \quad (17)$$

Der Punkt $\underline{w} = \underline{w}_\infty$ wird durch diese Abbildung in den Punkt $\underline{z} = \infty$ abgebildet. Damit hat die Abbildungsfunktion eine Polstelle bei $\underline{w} = \underline{w}_\infty$ und beim konjugiert komplexen Wert $\underline{w} = \underline{w}_\infty^*$. Wie bei der vorangegangenen Abbildung auf das Innere eines Polygons gilt auch hier:

- der Term mit $u_i = \infty$ entfällt
- die Winkel φ_i liegen innerhalb des Feldbildes. Sie sind die Außenwinkel des Polygons.
- für die Winkelsumme gilt

$$\sum_{i=1}^n (\varphi_i / \pi - 1) = 2 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = -2\pi \quad (19)$$

Sofern $\underline{w} = \infty$ nach $\underline{z} = \infty$ abgebildet wird, gilt Gl. (10) unverändert, da dieser Fall auch als Abbildung auf das Innere eines Polygons interpretiert werden kann.

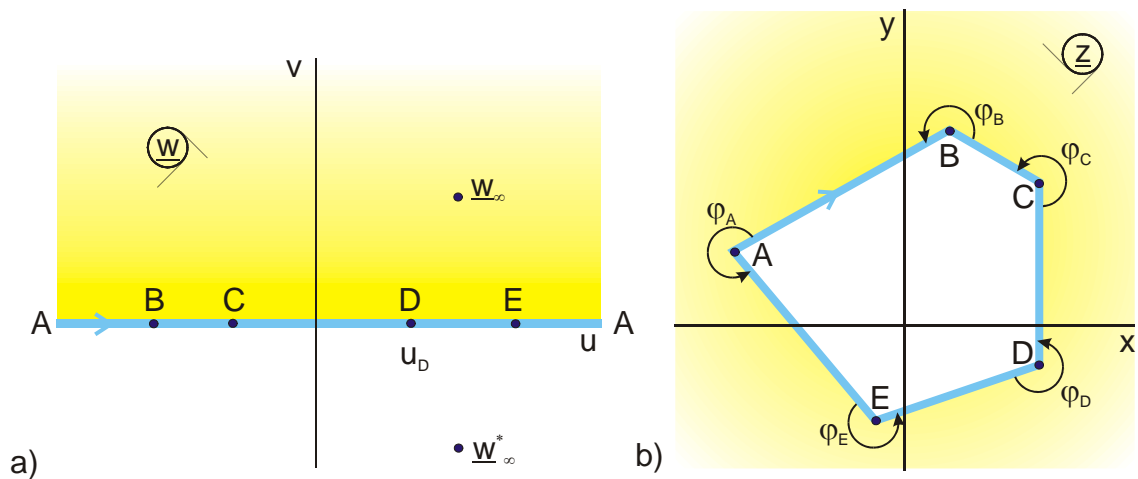


Bild 4.3: Abbildung der oberen Halbebene auf das Äußere eines Polygons

Beim Berechnen der Abbildungsfunktion für eine Polygonabbildung können drei der Unbekannten u_i , u_∞ und v_∞ frei gewählt werden. Damit wird die Lage des Polygons in der z -Ebene eindeutig festgelegt. Falls das Polygon symmetrisch ist, können bis zu

fünf Unbekannte frei gewählt werden, durch gleichartig symmetrische Annordnung der Punkte in der w -Ebene.

Die Auswertung des Schwarz-Christoffel-Integrals in Gl. (9) führt nur in Sonderfällen zu geschlossenen analytischen Ausdrücken. Diese Fälle lassen sich überschlägig wie folgt klassifizieren:

- Bei bis zu zwei Ecken mit Winkeln von $\pi/2$ oder $3\pi/2$ und weiteren Ecken mit Winkeln von 0 oder π ergeben sich Lösungen mit elementaren Funktionen.
- Bei bis zu drei oder vier Ecken mit Winkeln von $\pi/2$ oder $3\pi/2$ und weiteren Ecken mit Winkeln von 0 oder π ergeben sich Lösungen mit elliptischen Funktionen.
- Bei symmetrischen Feldbildern sind jeweils doppelt soviel Ecken zulässig.

In allen anderen Fällen, also bei mehr Ecken mit Winkeln von $\pi/2$ oder $3\pi/2$ und bei Polygonen mit Winkeln, die nicht Vielfache von $\pi/2$ sind, ist die Lösung des Integrals nur in wenigen Sonderfällen geschlossen möglich. Aber auch dann, wenn das Feldbild nicht angegeben werden kann, läßt sich unter Umständen mit Gl. (7) die Feldstärkeverteilung berechnen.

Zur Lösung des Schwarz-Christoffel-Integrals werden als Hilfsmittel die Partialbruchzerlegung und die Substitution eingesetzt. Häufig benutzte Substitutionen sind z.B. von der Form:

$$\underline{w} = \cos \underline{w}_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{w}_1 = \arccos \underline{w}_1 \quad \text{und} \quad d\underline{w} = -\sqrt{1 - \underline{w}^2} d\underline{w}_1 \quad (20)$$

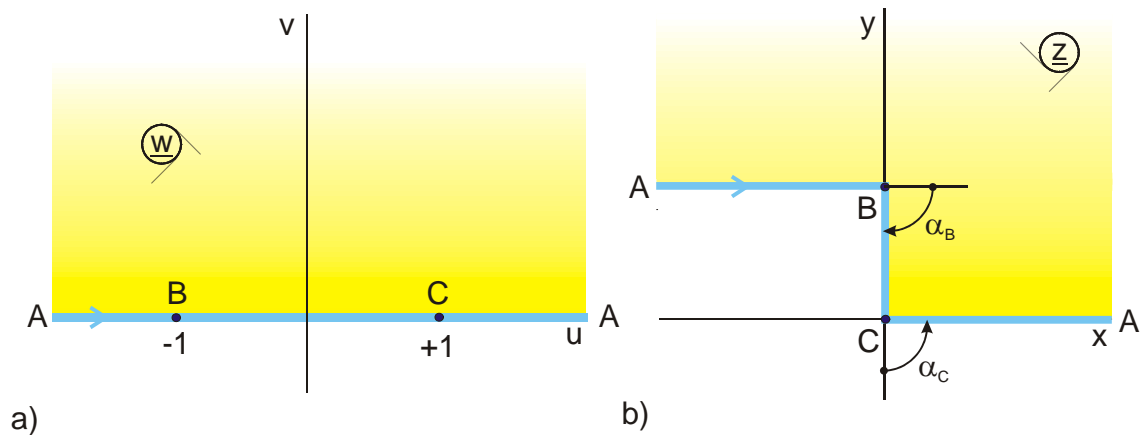
$$\underline{w} = \frac{1}{\cos^2 \underline{w}_1} \quad \Rightarrow \quad \underline{w}_1 = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{\underline{w}}} \right) \quad \text{und} \quad d\underline{w} = 2 \underline{w} \sqrt{\underline{w} - 1} d\underline{w}_1 \quad (21)$$

$$\underline{w} = \sinh^2 \underline{w}_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{w}_1 = \operatorname{arcsinh} \sqrt{\underline{w}} \quad \text{und} \quad d\underline{w} = 2\sqrt{\underline{w}} \sqrt{\underline{w} + 1} d\underline{w}_1 \quad (22)$$

Beispiel 1: Feldbild einer rechtwinkligen Stufe (Abbildung A 6)

Entsprechend Bild 4.4 soll das homogene Feld der oberen w -Halbebene auf eine Stufe in der z -Ebene abgebildet werden. Um ein einfaches Integral zu erhalten, werden die drei frei wählbaren Ecken u_i nach ∞ und ± 1 gelegt.

Ecke :	A	B	C
Drehwinkel α_i :	2π	$-\pi/2$	$\pi/2$
u_i :	∞	-1	$+1$

**Bild 4.4: Beispiel 1**

Die Bedingung (13) ist erfüllt. Der Term für Punkt A entfällt wegen $u_A = \infty$. Aus Gl. (14) folgt:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{(\underline{w} + 1)^{-1/2} (\underline{w} - 1)^{1/2}} \quad (23)$$

$$z = \int_0^{\underline{w}} \sqrt{\frac{\underline{w} + 1}{\underline{w} - 1}} d\underline{w} \quad (24)$$

Aus einer Integralsammlung folgt als Lösung des Integrals:

$$\underline{z} = \sqrt{\underline{w}^2 - 1} + \operatorname{ar} \cosh \underline{w} + \ln 2. \quad (25)$$

Die Konstante $\ln 2$ wird weggelassen, da sie das Feldbild nicht beeinflusst. Als Lösung der Aufgabenstellung ergibt sich

$$\underline{z} = \sqrt{\underline{w}^2 - 1} + \operatorname{ar} \cosh \underline{w}. \quad (26)$$

Die Lage der Punkte B und C in der z -Ebene findet man durch Einsetzen in diese Gleichung.

$$\text{Punkt C:} \quad \underline{w}_C = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{z}_C = 0$$

$$\text{Punkt B:} \quad \underline{w}_B = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{z}_B = j\pi.$$

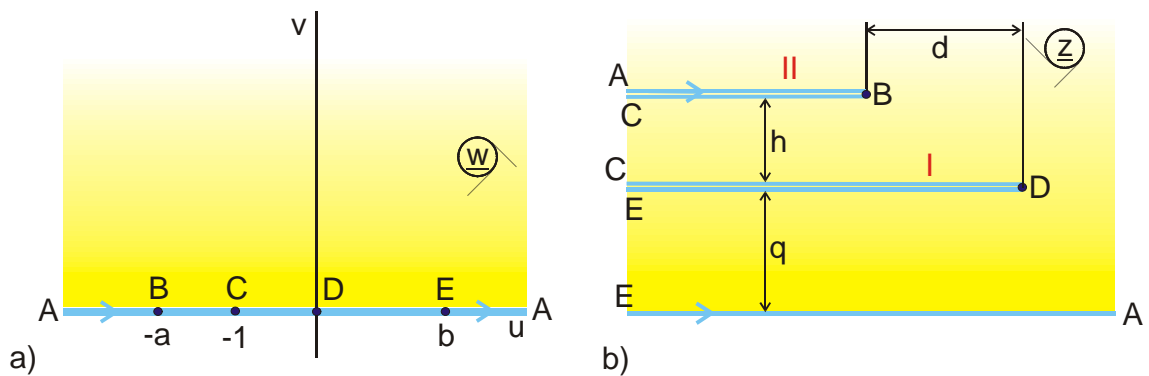
Beispiel 2: Zwei parallele Bleche oberhalb einer leitenden Ebene (Abbildung P3.6)

Entsprechend Bild 4.5 soll die obere w -Halbebene auf zwei parallele Bleche oberhalb einer leitenden Ebene abgebildet werden. Die drei frei wählbaren Punkte u_i werden so festgelegt, daß A bei ∞ liegt, C bei -1 und D bei 0 .

Ecke :	A	B	C	D	E
Drehwinkel α_i :	2π	$-\pi$	π	$-\pi$	π
u_i :	∞	$-a$	-1	0	b

Mit Gl. (14) erhält man:

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{(\underline{w} + a) \underline{w}}{(\underline{w} + 1)(\underline{w} - b)} d\underline{w} \quad (27)$$

**Bild 4.5: Beispiel 2**

Der Integrand muß zunächst umgeformt werden, damit man die dazugehörigen Integrale in einer Integralsammlung findet:

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \left(\frac{\underline{w}^2}{(\underline{w}+1)(\underline{w}-b)} + a \frac{\underline{w}}{\underline{w}^2 + \underline{w}(1-b) - b} \right) d\underline{w} . \quad (28)$$

Als Lösung ergibt sich:

$$\underline{z} = \underline{w} + \frac{a+b-1}{2} \ln((\underline{w}+1)(\underline{w}-b)) + \frac{1+b^2-a(1-b)}{2(1+b)} \ln \frac{\underline{w}-b}{\underline{w}+1} . \quad (29)$$

Durch Einsetzen der Punkte B und D in diese Gleichung findet man die Bestimmungsgleichungen $h(a, b)$, $q(a, b)$ und $d(a, b)$, mit denen man die Lage der Bleche als Funktion der Parameter a und b berechnen kann. In der Abbildung P 3.6 wird die Abbildungsfunktion (29) benutzt. Zusätzlich wird dort noch mit Hilfe einer Vorabbildung der Strecke \overline{CDE} in der w -Ebene ein anderes Potential gegeben. Damit ergibt sich dann das Feldbild eines Bleches I mit dem Potential u_1 zwischen einer leitenden Ebene und einem parallelen Blech II, beide jeweils mit dem Potential 0.

Beispiel 3: Rechteckiger Leiter im homogenen Feld (Abbildung A 10.1)

Wird ein rechteckiger Leiter in ein homogenes elektrisches Feld eingebracht (Bild 4.6a), so ist die horizontale Mittellinie rechts und links des Leiters eine Potentiallinie. Das Feldbild ergibt sich also durch Abbilden der oberen w -Halbebene auf die in Bild 4.6c dargestellte Berandung. Unter Ausnutzung der Symmetrie werden die Eckpunkte C und D bei ± 1 und die Eckpunkte B und E bei $\pm 1/k$ (mit $k < 1$) gewählt.

Ecke :	A	B	C	D	E
Drehwinkel α_i :	2π	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$
u_i :	∞	$-1/k$	-1	1	$1/k$

Mit Gl. (14) erhält man:

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = \frac{1}{(\underline{w} + 1/k)^{1/2} (\underline{w} + 1)^{-1/2} (\underline{w} - 1/k)^{1/2} (\underline{w} - 1)^{-1/2}} \quad (30)$$

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{\sqrt{\underline{w}^2 - 1}}{\sqrt{\underline{w}^2 - 1/k^2}} d\underline{w} = k \int_0^{\underline{w}} \frac{\sqrt{1 - \underline{w}^2}}{\sqrt{1 - k^2 \underline{w}^2}} d\underline{w} . \quad (31)$$

Läßt man den konstanten Faktor k weg, ergibt sich als Lösung:

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{\sqrt{1 - \underline{w}^2}}{\sqrt{1 - \underline{w}^2}} d\underline{w} = B_a(\underline{w}, k) , \quad (32)$$

die algebraische Form der Funktion $B(\underline{w}, k)$, eines elliptischen Integrals (s. Kap. 12.3).

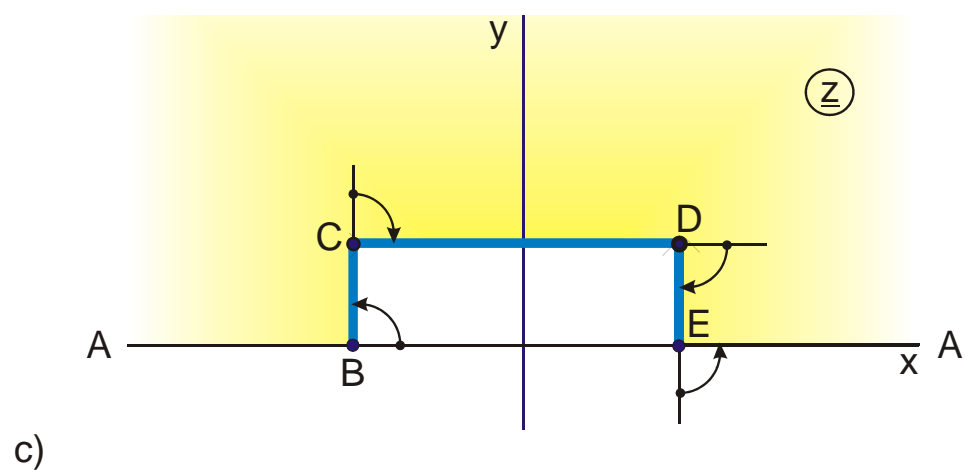
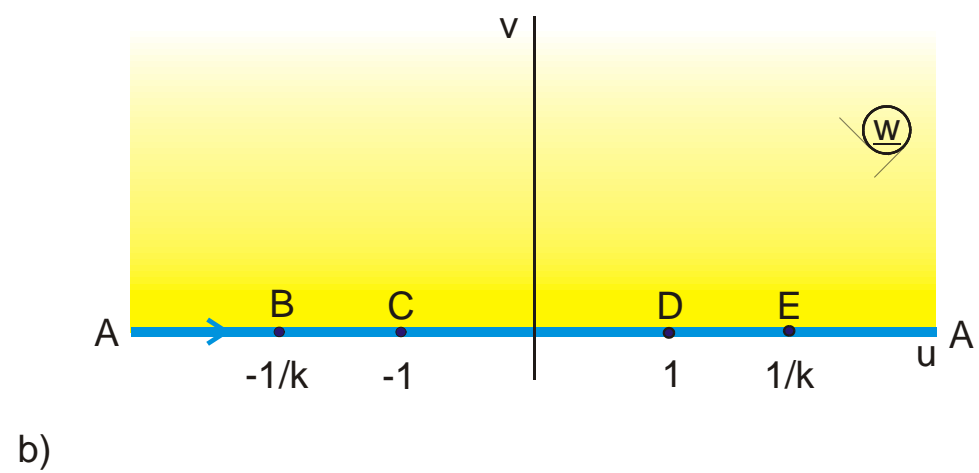
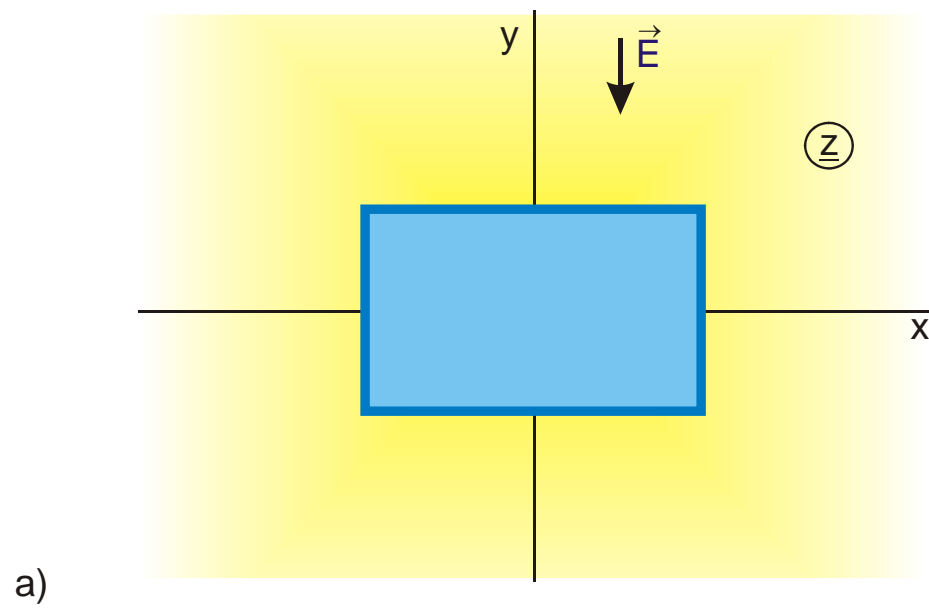


Bild 4.6: Beispiel 3

Beispiel 4: Abbildung der oberen w -Halbebene auf das Äußere eines unendlich dünnen Streifens

Die drei frei wählbaren Koordinaten in der w -Ebene werden unter Ausnutzung der Symmetrie des Feldbildes folgendermaßen festgelegt:

1. Koordinate: Die beiden seitlichen Ecken des Streifens, B und C, werden nach $u = \pm 1$ gelegt.
2. Koordinate: Der Punkt A im Nullpunkt unterhalb des Streifens wird nach $u = \pm \infty$ gelegt.
3. Koordinate: Der Punkt ∞ der z -Ebene wird nach $v = 1$ bzw. $\underline{w}_\infty = j$ gelegt.

Ecke :	A	B	C
Drehwinkel α_i :	0	$-\pi$	$-\pi$
u_i :	∞	-1	+1

Damit ergibt sich durch Einsetzen in Gl. (17)

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{(\underline{w}+1)^{-1}(\underline{w}-1)^{-1}(\underline{w}-j)^2(\underline{w}+j)^2} \quad (33)$$

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{\underline{w}^2 - 1}{(\underline{w}^2 + 1)^2} d\underline{w} \quad (34)$$

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \frac{\underline{w}^2}{(\underline{w}^2 + 1)^2} d\underline{w} - \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{(\underline{w}^2 + 1)^2} \quad (35)$$

Die Integrale lassen sich durch elementare Funktionen darstellen. Ihre Lösung ist:

$$\underline{z} = \frac{\underline{w}}{\underline{w}^2 + 1} . \quad (36)$$

Damit die Punkte B und C des Feldbildes bei ± 1 liegen, wird der Faktor 2 hinzugefügt.

$$\underline{z} = \frac{2 \underline{w}}{\underline{w}^2 + 1} . \quad (37)$$

Diese mit der Schwarz-Christoffel-Transformation berechnete Abbildungsfunktion ist in dieser Form für die technische Anwendung nicht brauchbar. Die beiden Linienladungen bei $\pm\infty$, die das homogene Feld der w -Ebene erzeugen, sind in den Nullpunkt unterhalb des Streifens abgebildet worden. Dort ist also die Quelle eines Dipolfeldes (Bild 4.7).

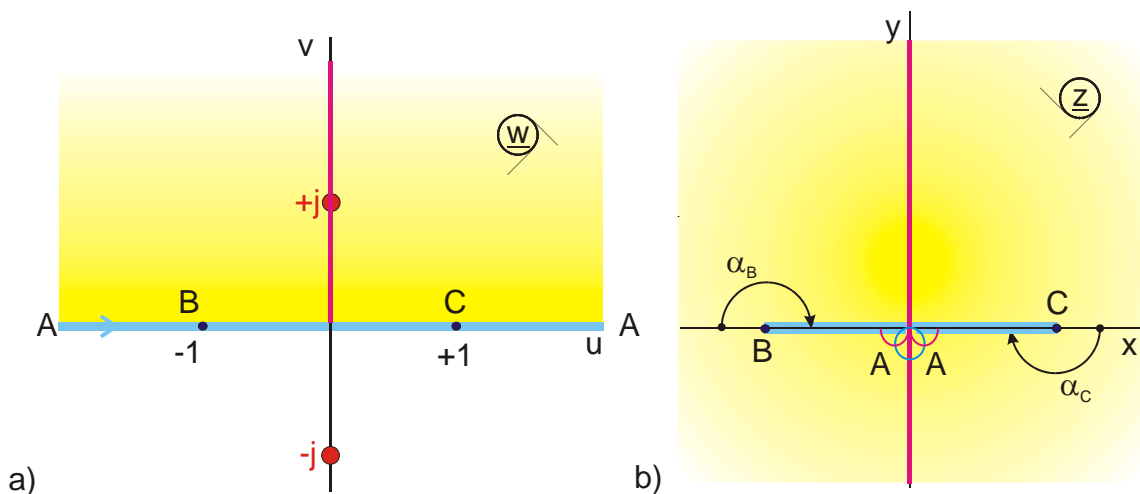


Bild 4.7: Beispiel 4

Anschaulich interpretiert, wird bei dieser Abbildung die reelle Achse in den Punkten B und C um 180° nach unten abgewinkelt. Die gesamte untere w -Halbebene wird zusammengefaltet und verschwindet im Inneren des dünnen Streifens. Der Punkt $\underline{w} = j$ wird nach $\underline{z} = \infty$ abgebildet. Um nun von der bisher gewonnenen Abbildungsfunktion entsprechend Gl. (4.37) zu einer technisch brauchbaren Abbildung zu kommen, nämlich zum Feldbild eines geladenen Leiterstreifens gegen unendlich (Abbildung B 2) werden mit einer Vorabbildung (s. Kap. 5) zwei Linienladungen der Größe ± 1 bei $\pm j$ in der w -

Ebene angebracht, so daß die reelle Achse eine Potentiallinie bleibt. Diese beiden Lini-
enladungen erzeugen dann in der Bildebene das Feldbild eines geladenen dünnen Lei-
terstreifens im freien Raum (bzw. gegen ∞) (Bild 4.8). Alle Feldlinien entspringen dem
Leiterstreifen und enden im Unendlichen.

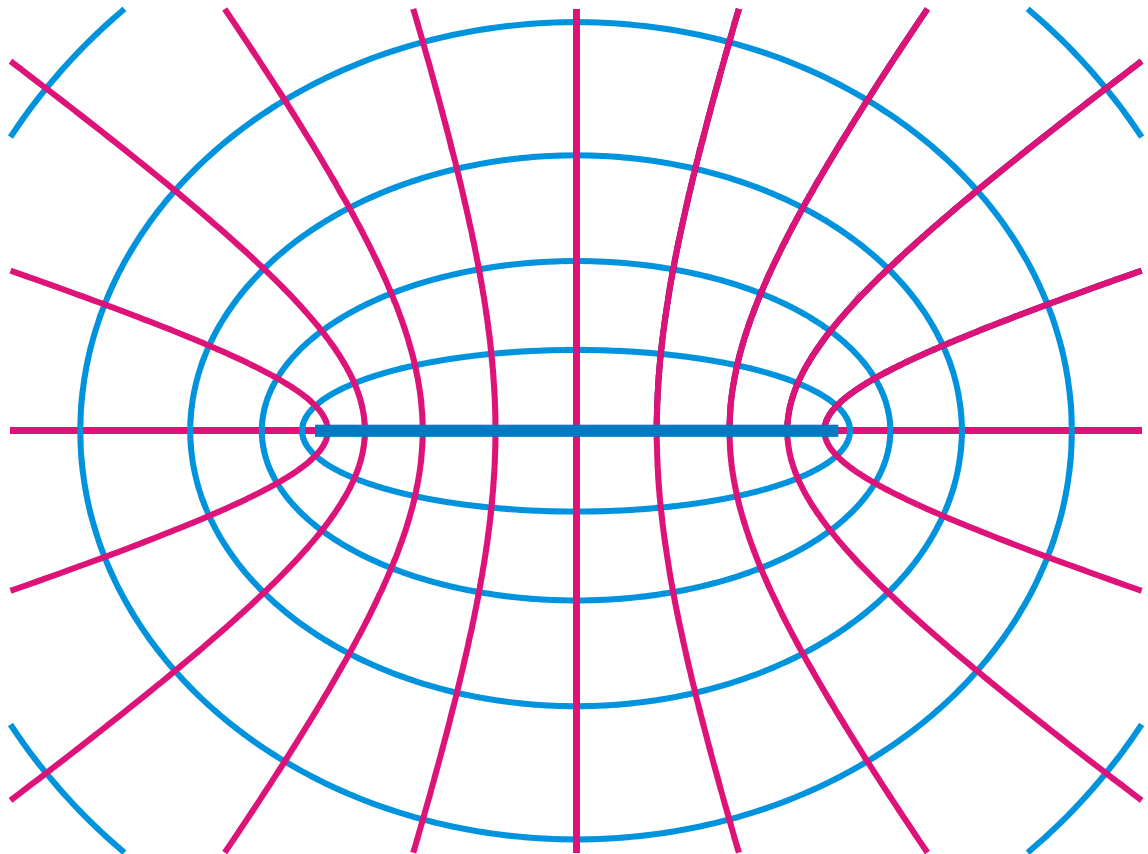


Bild 4.8: Abbildung B 2, Leiterstreifen gegen ∞

5. Vorabbildungen

Im vorangegangenen wurde bei einer konformen Abbildung $\underline{z} = f(\underline{w})$ stets das homogene Feld der w -Ebene auf die z -Ebene abgebildet. Alle derartigen Abbildungen lassen sich variieren bzw. verändern, indem man nicht das homogene Feld, sondern ein inhomogenes Feld in der w -Ebene auf die z -Ebene abbildet. Dieses Verfahren wird Vorabbildung genannt. Mathematisch bedeutet es

$$\underline{z} = f_1(\underline{w}_1) \quad \text{und} \quad \underline{w}_1 = f(\underline{w}), \quad (1)$$

wobei $f_1(\underline{w}_1)$ die ursprüngliche Abbildungsfunktion ist und $\underline{w}_1 = f(\underline{w})$ das neu dazugekommene, inhomogene Feld. Derartige Vorabbildungen kann man auch mehrfach hintereinander durchführen, z.B.:

$$\begin{aligned} \underline{w}_1 &= f(\underline{w}) \\ \underline{w}_2 &= f_1(\underline{w}_1) \\ \underline{w}_3 &= f_2(\underline{w}_2) \\ \underline{z} &= f_3(\underline{w}_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Im folgenden einige Beispiele zur Veranschaulichung der Vorgehensweise.

Beispiel 1: Linienladung zwischen zwei parallelen Blechen

Gesucht ist das Feldbild einer Linienladung, die in der Mitte zwischen zwei parallelen Blechen angeordnet ist (Bild 5.1). Von Kap. 2.3 ist bekannt, daß die Funktion $\underline{z} = \ell n \underline{w}$ die obere Halbebene auf einen Parallelstreifen in der Bildebene abbildet. Der Logarithmus löst also den 1. Teil der Abbildungsaufgabe, er erzeugt zwei parallele metallische Elektroden. Es fehlt nur noch die Linienladung in der Mitte. Aus Bild 2.3 kann man ent-

nehmen, daß dieser Punkt E bei $+j$ liegt. Sofern man also dort eine Linienladung anbringt, ergibt sich das gesuchte Feldbild. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die reelle Achse der w -Ebene in Bild 5.2 nach wie vor eine Potentiallinie sein muß. Deshalb müssen nach dem Spiegelungsprinzip entsprechend Bild 5.3 zwei gleich große, entgegengesetzt geladene Linienladungen in der w -Ebene angeordnet werden. Die Abbildungsfunktion, die zu dieser Ladungsverteilung gehört, heißt entsprechend Kap. 2.7:

$$\underline{z} = j \tanh \underline{w}. \quad (3)$$

Dieses Feldbild wird nun mit dem Logarithmus abgebildet und löst die gestellte Aufgabe (Bild 5.4).

$$\text{Vorabbildung: } \underline{w}_1 = j \tanh \underline{w} \quad (4)$$

$$\text{Abbildung: } \underline{z} = \ln \underline{w}_1 \quad (5)$$

Die vollständige Abbildungsfunktion lautet damit

$$\underline{z} = \ln(j \tanh \underline{w}). \quad (6)$$

Diese Funktion bildet das homogene Feld der w -Ebene auf das Feldbild einer in der Mitte zwischen zwei parallelen Metallblechen angeordneten Linienladung ab.

Zum Schluß kann man diese Abbildungsfunktion noch etwas umformen und das Feldbild in der Bildebene zentrieren. Mit Gl. (2.13) wird

$$\tanh \underline{w} = j \tan(-j w) \quad (7)$$

$$\text{und } \underline{z} = \ln(-\tan(-j w)) = \ln \tan(j \underline{w}). \quad (8)$$

Der Übergang von $\tan(j \underline{w})$ auf $\tan(\underline{w})$ ändert nichts an der Abbildung. Es wird nur die Zuordnung zwischen u, v und Potentiallinien bzw. Feldlinien vertauscht. Durch Additi-

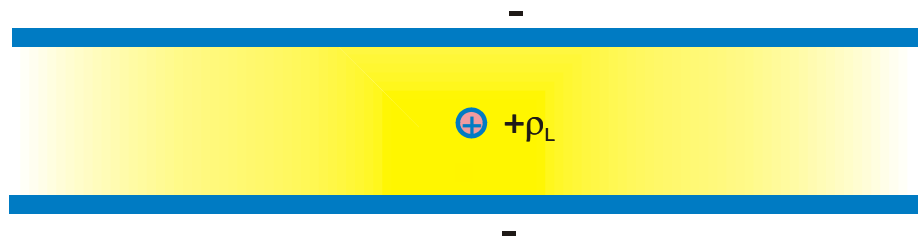
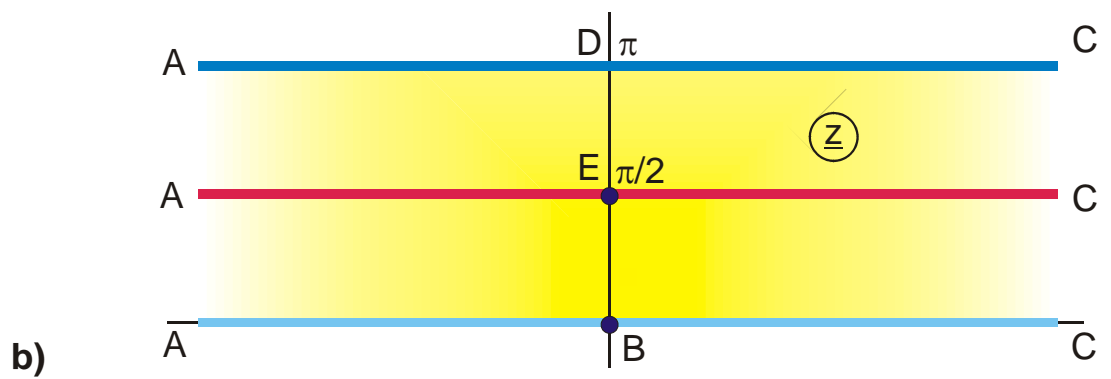
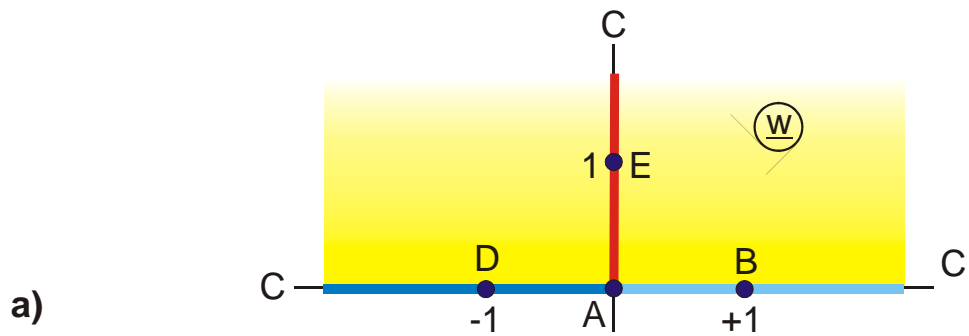
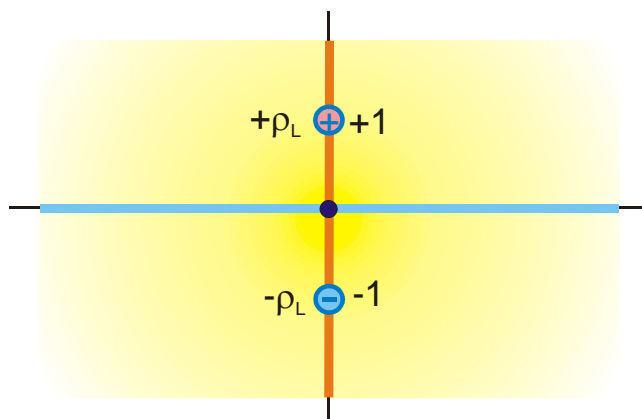
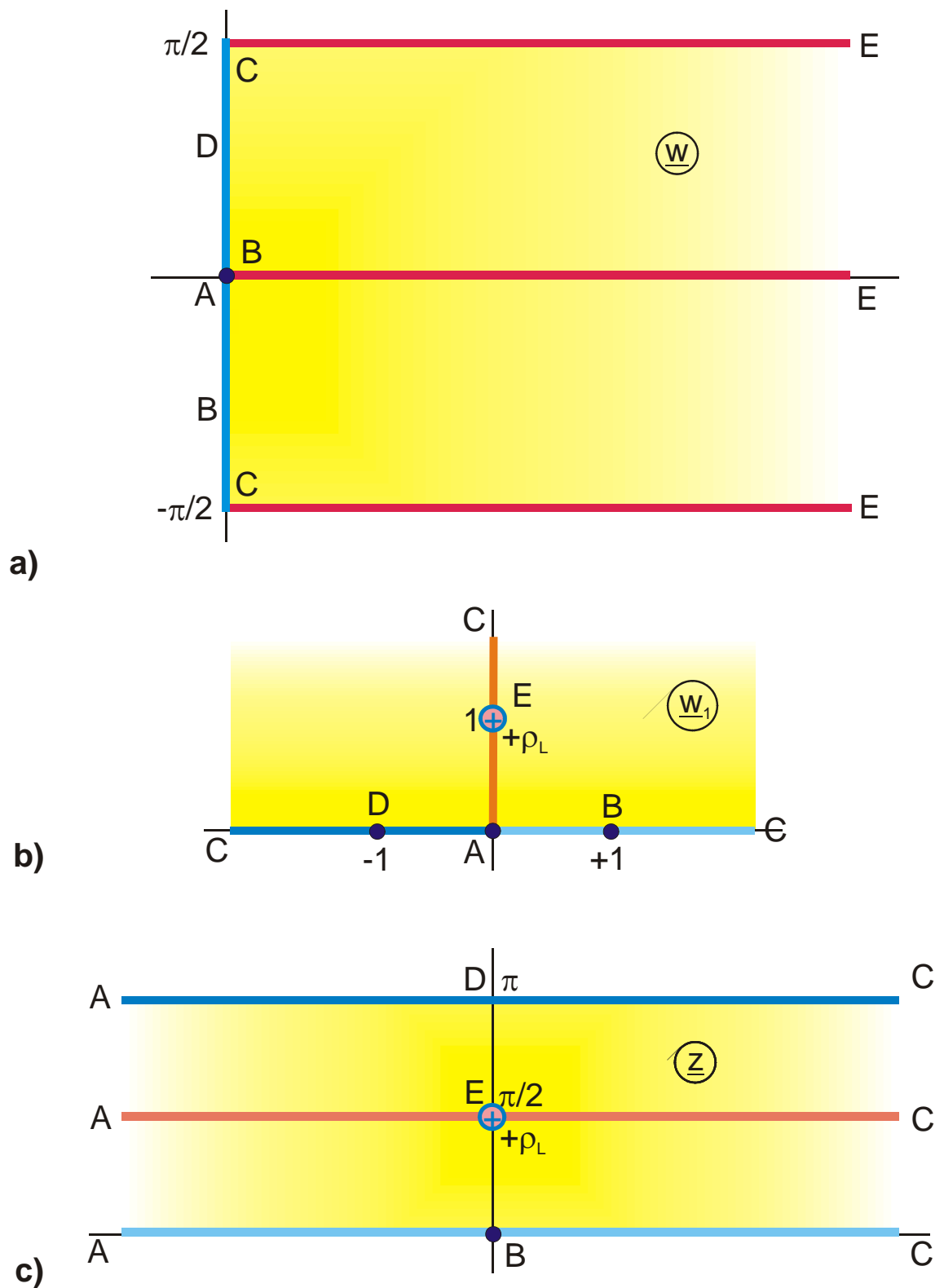


Bild 5.1: Beispiel 1

Bild 5.2: $z = \ln w$, (Abbildung H 1)Bild 5.3: $z = j \tanh w$

Bild 5.4: Vorabbildung zur Funktion $z = \ln(j \tanh w)$

on der Konstanten $-j\pi/2$ wird die Linienladung in den Nullpunkt der Bildebene verschoben. Damit ergibt sich als Endergebnis (Bild 5.5, Abb. H 2):

$$\underline{z} = \ell \ln \tan \underline{w} - j\pi/2 . \quad (9)$$

In gleicher Weise wie in diesem Beispiel lassen sich beliebige Anordnungen von Lini- enladungen oder Liniendipolen zwischen die beiden parallelen Bleche einbringen. Aus- gedehnte Elektroden lassen sich ebenfalls durch Vorabbildungen zu einer Abbildung hinzufügen. Im folgenden Beispiel 2 wird ein dünner Leiterstreifen zwischen die paral- lelen Bleche eingebracht.

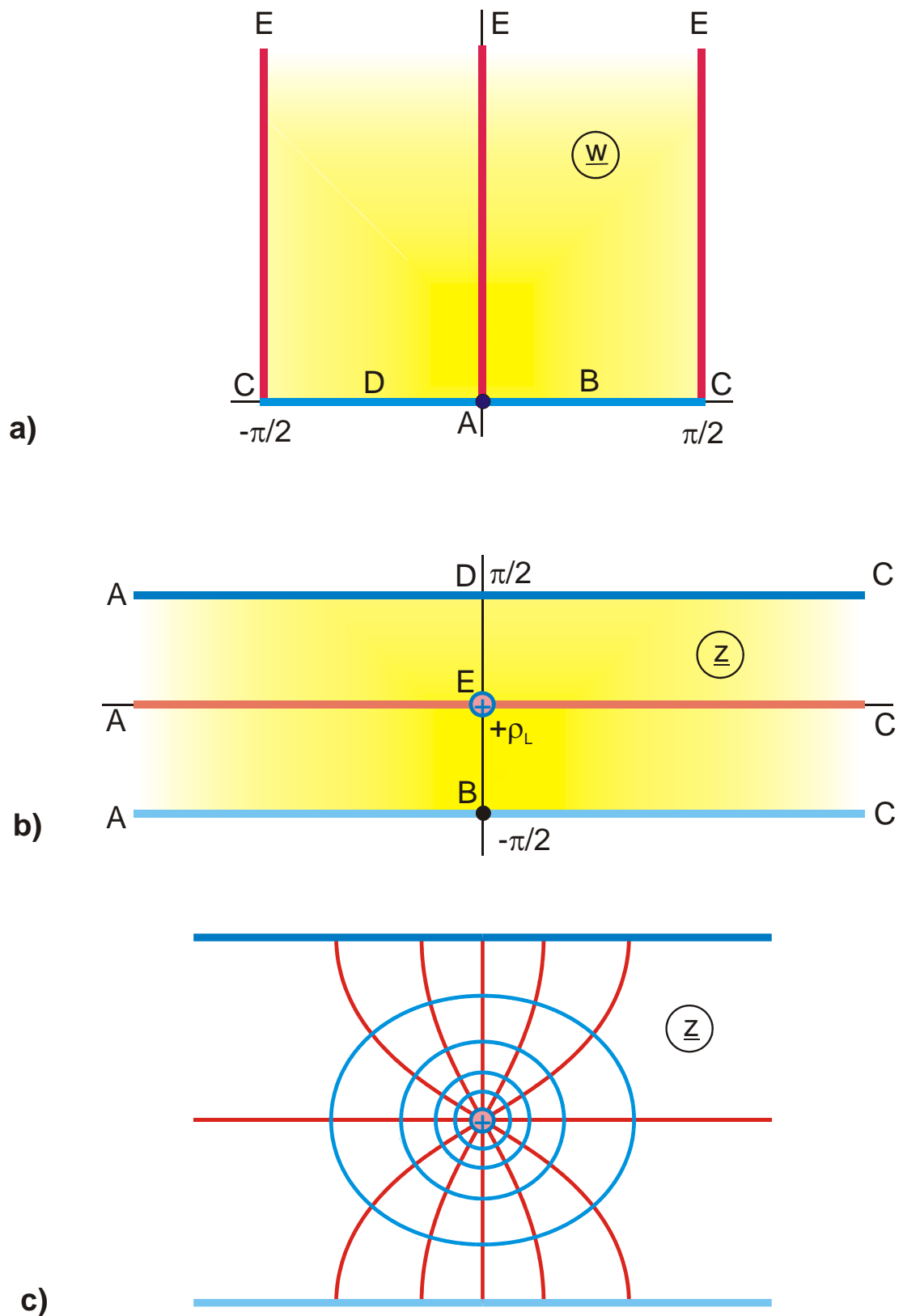


Bild 5.5: Endergebnis von Beispiel 1: $z = \ln \tan w - j \pi/2$ (H 2)

Beispiel 2: Felddbild einer Streifenleitung

Gesucht ist das Felddbild eines Streifenleiters in der Mitte zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten Metallplatten (Bild 5.6). Dazu wird für die Abbildung $\underline{z} = \ell n \underline{w}$ eine Vorabbildung gesucht, die in der imaginären Achse der w -Ebene einen Leiterstreifen enthält und bei der die reelle Achse eine Potentiallinie ist. Aus dem Abbildungsverzeichnis ergibt sich dafür die Abbildung E 3, um $+90^\circ$ gedreht.

$$\text{Abbildung: } \underline{z} = \ell n \underline{w}_1 \quad (10)$$

$$\text{Vorabbildung: } \underline{w}_1 = j \cdot \text{sn}(\underline{w}, k) . \quad (11)$$

Bild 5.7 zeigt die beiden Abbildungen. Der Leiterstreifen beginnt in der Bildebene im Punkt E, dort, wo in Bsp.1 die Linienladung angeordnet war, und erstreckt sich bis zum Punkt D bzw. F. Damit ergibt sich als Breite d des Streifens:

$$d = \text{Re } \ell n(j/k) = \ell n k . \quad (12)$$

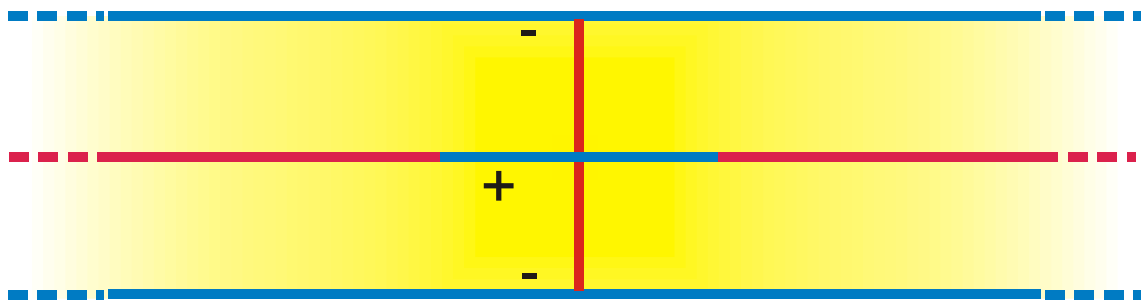


Bild 5.6: Symmetrische Streifenleitung (Beispiel 2)

Um das Feldbild zu zentrieren, wird die Mitte des Leiterstreifens in den Nullpunkt der z -Ebene geschoben (Abb. H 7):

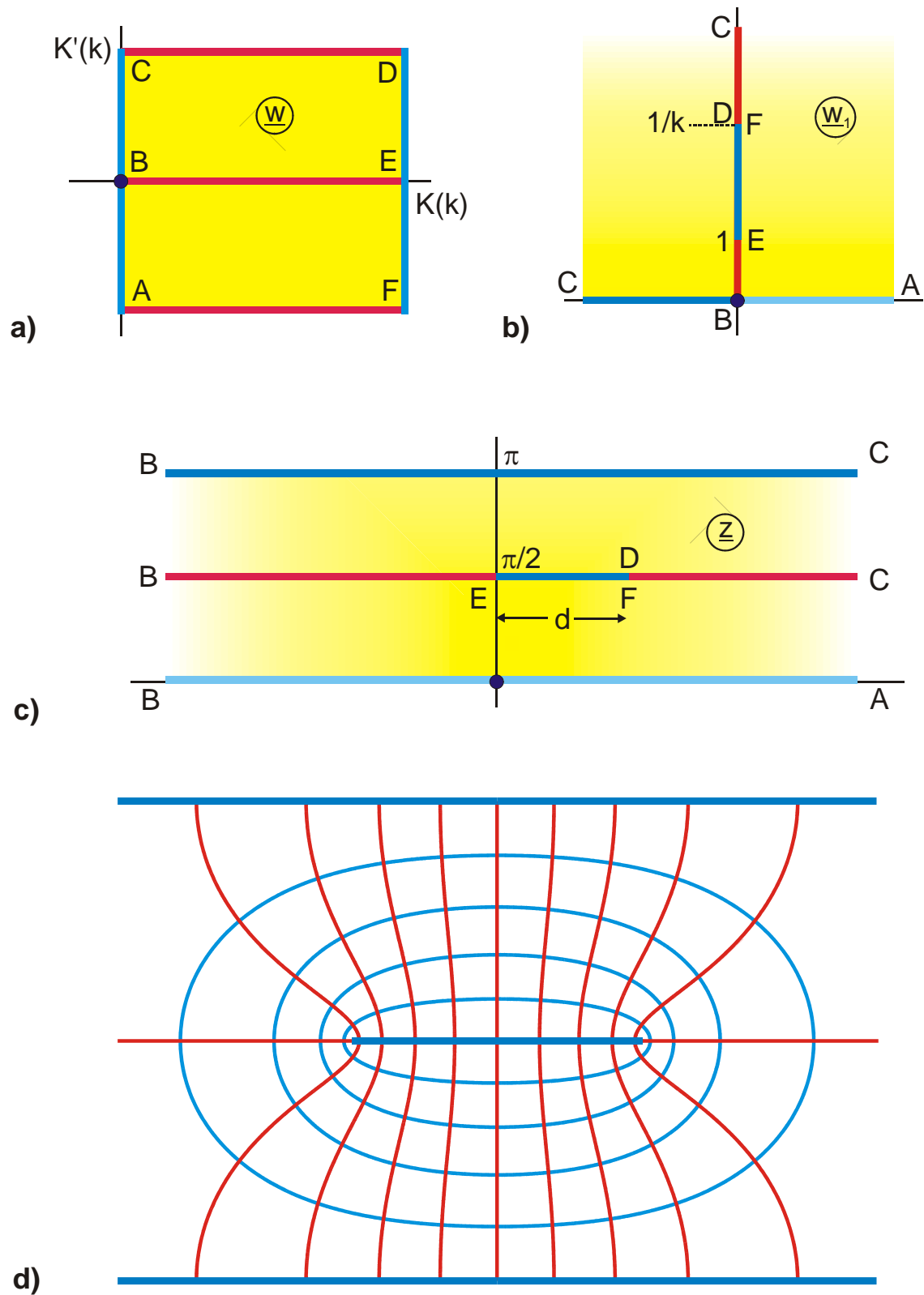
$$\underline{z} = \ell n(j \operatorname{sn}(\underline{w}, k)) - j \frac{\pi}{2} - d/2 \quad (13)$$

$$\underline{z} = \ell n \operatorname{sn}(\underline{w}, k) - d/2 \quad (14)$$

Der durch die Vorabbildung in die w_1 -Ebene eingebrachte Leiterstreifen bleibt durch die Abbildung mit dem Logarithmus nur deshalb weiterhin ein Streifen, weil er in der w_1 -Ebene auf einer Geraden liegt, die wieder auf eine Gerade abgebildet wird. Entsprechend Bild 5.2 wird durch $\underline{z} = \ell n \underline{w}$ die vertikale, rote Gerade \overline{AC} auf die horizontale, rote Gerade \overline{AC} abgebildet. Streifen oder Geradenstücke, die man durch eine Vorabbildung auf dieser Geraden anbringt, bleiben also in ihrer Form erhalten.

Während punktförmige Quellen (Linienladungen, Liniendipole) an beliebigen Stellen mit Hilfe einer Vorabbildung in eine vorhandene Abbildung eingebracht werden können, ist dieses Verfahren für räumlich ausgedehnte Elektroden auf Sonderfälle beschränkt, solange exakte Lösungen erwünscht sind. In der Regel lassen sich nur dünne Streifen wie in Beispiel 2, die sich allerdings auch einseitig bis ins Unendliche erstrecken dürfen, auf diese Art erzeugen. Außerdem müssen sie in Symmetrieebenen des Feldbildes liegen, damit sie ihre Form beibehalten.

Sofern man nur eine Näherungslösung sucht, ergeben sich mit der Methode der Vorabbildung weitaus umfangreichere Möglichkeiten, um unbekannte Potentialfelder mit Hilfe bereits bekannter Abbildungen zu berechnen.

Bild 5.7: Beispiel 2, $z = \ln \{j \operatorname{sn}(w, k)\}$ (H 7)

Beispiel 3: Streifenleiter

Im Beispiel 4.4 war die obere Halbebene auf das Äußere eines Leiterstreifens abgebildet worden. Dabei ergab sich ein Liniendipol im Punkt A (Bild 4.7). Gesucht ist jedoch das Feldbild eines geladenen dünnen Streifens gegen den Punkt ∞ . Um dieses zu erhalten, muß in der z -Ebene im Punkt ∞ eine Linienladung angebracht werden. Dieser Punkt liegt in der w -Ebene bei $\pm j$. Wie bereits in Beispiel 1 durchgeführt, heißt die notwendige Vorabbildung:

$$\text{Vorabbildung: } \underline{w}_1 = j \tanh \underline{w} \pi. \quad (15)$$

Die bereits im Beispiel 4.4 gefundene Abbildung war:

$$\text{Abbildung: } \underline{z} = \frac{2 \underline{w}_1}{\underline{w}_1^2 + 1} \quad (16)$$

Beide Funktionen zusammengefaßt und umgeformt ergibt:

$$\underline{z} = j \sinh (2\underline{w}\pi).$$

Nach Kap. 2.5 ist diese Abbildung topologisch identisch mit

$$\underline{z} = \cosh (\underline{w} \pi).$$

Dies ist die Abbildung B 2 im Abbildungsverzeichnis.

Beispiel 4: Blechkante

Gesucht ist das Feldbild in der Umgebung einer rechtwinkligen Blechkante entsprechend Bild 5.8a. Aus der Symmetrie folgt, daß die Mittellinie eine Feldlinie ist. Damit ergibt sich als neue Berandung Bild 5.8b. Diese Berandung ist aber bereits in Beispiel 4.1 gelöst worden, dort allerdings als durchgehende Potentiallinie (Bild 4.4). In Bild 5.9 ist diese Abbildung noch einmal dargestellt. Die Gerade \overline{CA} ist jetzt aber rot eingetragen als Feldlinie und die ehemalige w -Ebene heißt w_1 -Ebene. Die dazugehörige Abbildung ist Gl. (4.13):

$$\underline{z} = \operatorname{ar} \cosh \underline{w}_1 + \sqrt{\underline{w}_1^2 - 1} . \quad (17)$$

Damit \overline{CA} nun eine Feldlinie ist, wird eine Vorabbildung gesucht, die das Feld in der w_1 -Ebene erzeugt. Aus dem Abbildungsverzeichnis ergibt sich Abb. A 1.2, allerdings mit -1 multipliziert und um $+1$ verschoben:

$$\underline{w}_1 = 1 - \underline{w}^2 . \quad (18)$$

Damit ist das gesuchte Feldbild gefunden.

Im Abbildungsverzeichnis ist für die Abbildung A 5 in diesem Fall eine andere Gleichung angegeben. Es gibt viele Wege, um für ein gegebenes Problem die Abbildungsfunktion zu finden. Die sich dabei jeweils ergebenden Funktionen unterscheiden sich häufig vollständig voneinander. Bereits eine Verschiebung des Koordinatenursprungs liefert eine andere Abbildungsfunktion. Die dazugehörigen Feldbilder sind jedoch alle topologisch identisch.

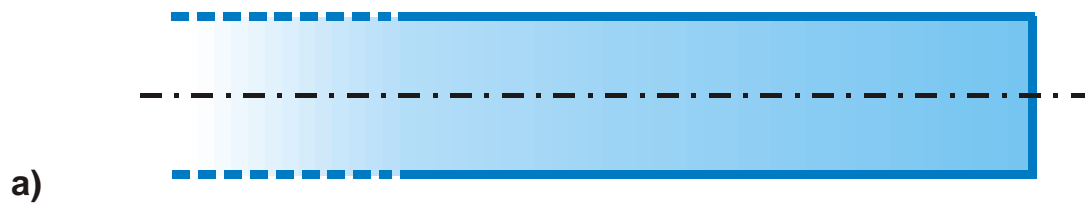
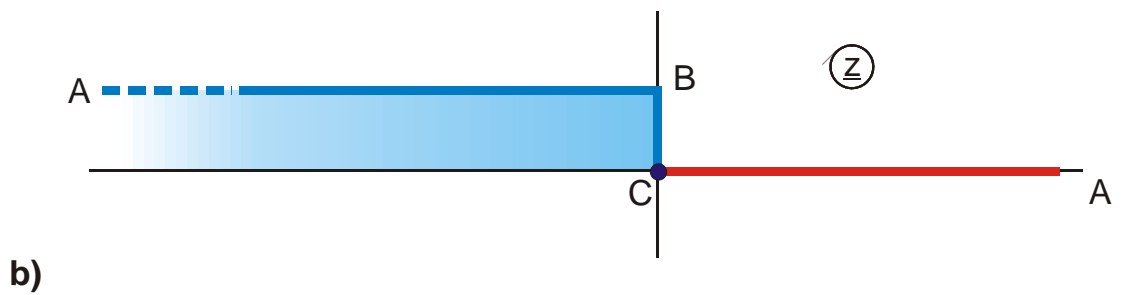
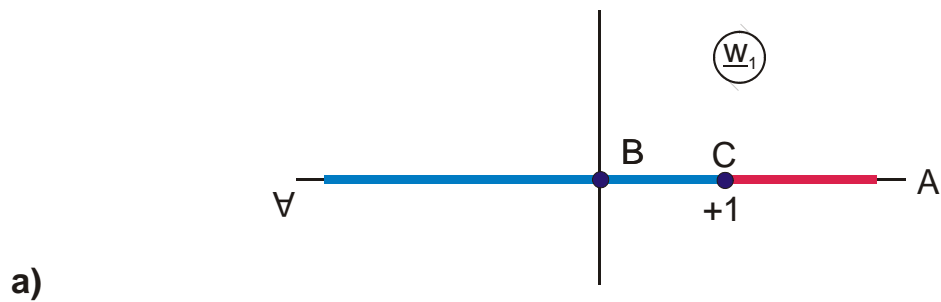


Bild 5.8: Blechkante, Beispiel 4

Bild 5.9: w_1 - und z -Ebene, Beispiel 4

Beispiel 5: Zwei Bleche mittig zwischen parallelen Platten

Gesucht ist das Feldbild einer Anordnung wie in Bild 5.10a. Aufgrund der Symmetrie ist die vertikale Symmetrieachse eine Potentiallinie und die horizontale eine Feldlinie. Damit bleibt die Kontur in Bild 5.10b als Abbildungsaufgabe. Von Kap. 1.4 her ist bekannt, daß die Funktion Arkussinus die obere Halbebene auf einen Halbstreifen abbildet (Bild 5.11). In diese Abbildung ist bereits farbig eingetragen worden, daß die Strecke \overline{DE} eine Feldlinie sein soll. Um dies zu erreichen, wird als Vorabbildung das in Beispiel 3 gefundene Feld eines Streifenleiters benutzt. Dieser Streifenleiter ist in Bild 5.11a allerdings noch um $1 + a/2$ aus dem Nullpunkt der w_1 -Ebene verschoben. Damit ergibt sich als Vorabbildung

$$\underline{w}_1 = \frac{a}{2} \cdot \cosh(\underline{w} \pi) + 1 + \frac{a}{2}. \quad (19)$$

In Bild 5.11a ist die Gerade \overline{DE} , die in Beispiel 3 als Streifenleiter interpretiert wurde, rot eingetragen, entsprechend der Problemstellung in Bild 5.10b. Feldbilder sind grundsätzlich orthogonale Kurvenscharen und die Zuordnung Feldlinie, Potentiallinie ist willkürlich, ebenso wie die Zuordnung der Farben rot und blau.

Damit das Feldbild wie in Bild 5.10b im I. Quadranten liegt, wird die Anordnung von Bild 5.11b noch um $\pi/2$ verschoben und um 90° gedreht. Dann lautet die gesuchte Abbildung (Abb. H 6.4)

$$\underline{z} = j \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \underline{w}_1 \right) \quad (20)$$

$$\underline{w}_1 = 1 + \frac{a}{2} (1 + \cosh(\underline{w} \pi)). \quad (21)$$

Der Parameter a ergibt sich aus der Abbildung von Punkt E mit Gl. (20) und (2.12):

$$s = \operatorname{ar} \cosh(1 + a) \quad (22)$$

$$a = \cosh(s) - 1. \quad (23)$$

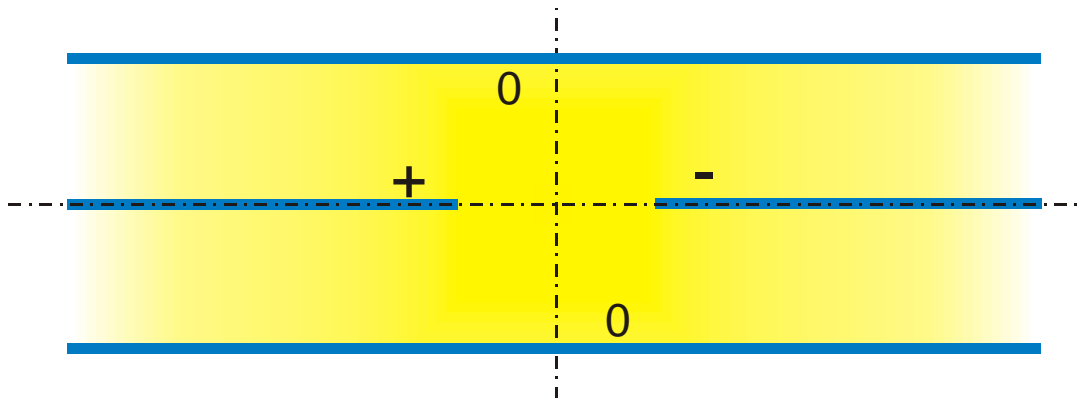
Berechnung von Punkt B:

In Gl. (19) wird $\underline{w}_1 = -1$ eingesetzt.

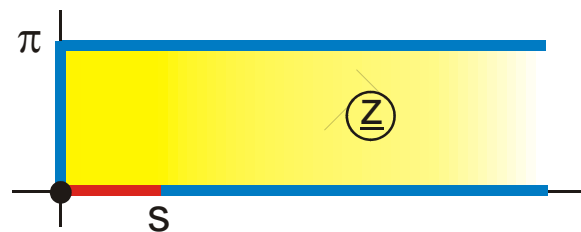
$$-1 = 1 + a/2(1 + \cosh(u_D \pi + j\pi))$$

$$u_B = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccosh}(1 + 4/a). \quad (24)$$

Geht man noch einmal zurück zu Bild 5.11, so erkennt man, daß sich allein durch Verschieben und/oder Vergrößern der roten Geraden \overline{DE} in der w_1 -Ebene eine Vielzahl von Abbildungen gewinnen lassen (z.B. H 1.4, H 6.1, H 6.2, H 6.3, H 6.4, J 1).



a)



b)

Bild 5.10: Beispiel 5

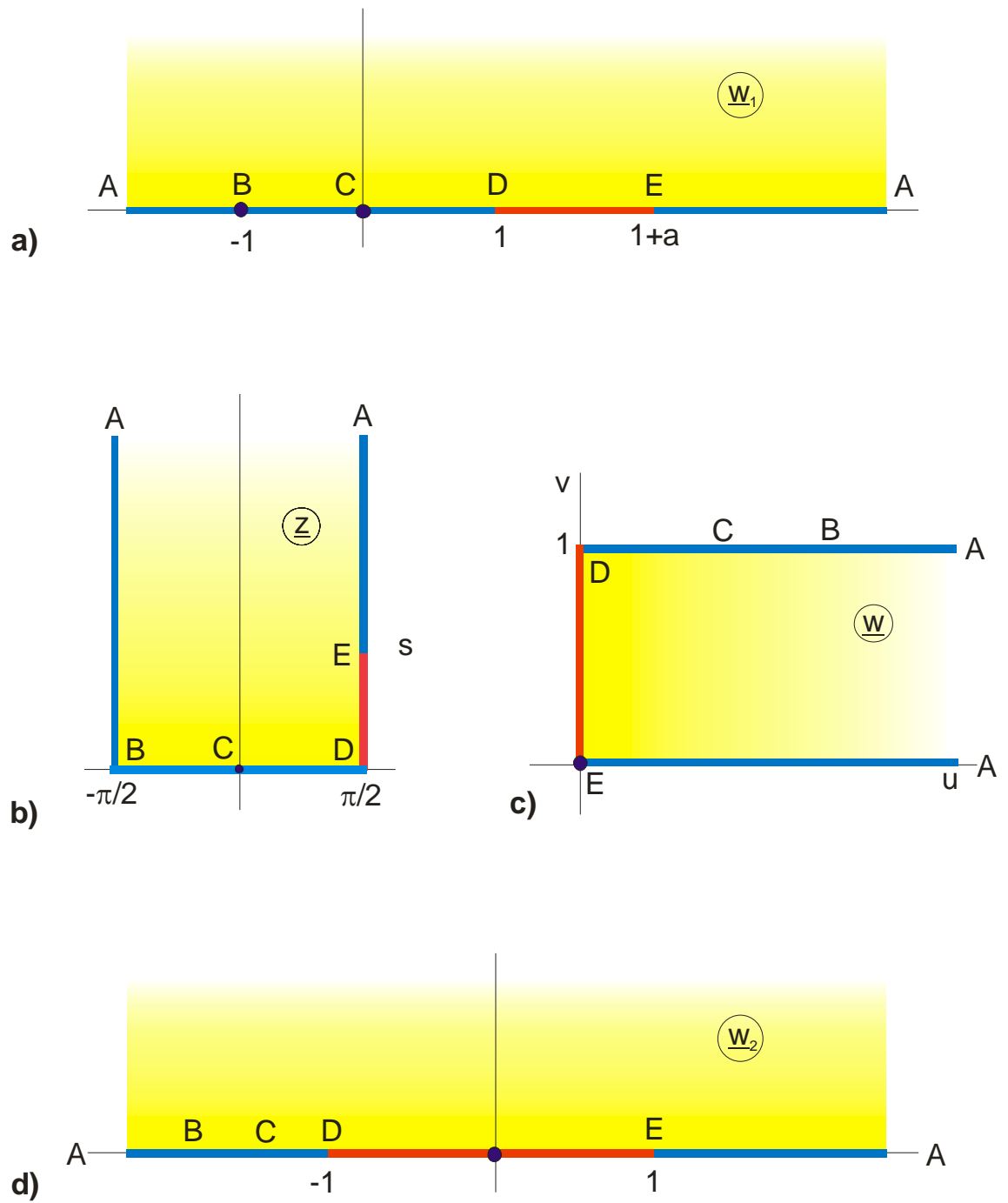


Bild 5.11:

$$z = \arcsin w_1$$

(Bild a, b)

$$w_2 = \cosh (w\pi)$$

(Bild c, d)

Beispiel 6: Zwei Bleche, außermittig zwischen zwei parallelen Platten

Bild 5.12a zeigt die Berandung des zu berechnenden Feldbildes. Aufgrund der Symmetrie ist die Symmetrieebene eine Potentiallinie (Bild 5.12b). Mit dem Verfahren der Polygonabbildung ergibt sich, daß die Funktion

$$\underline{z} = 2 \operatorname{ar} \coth \left(\frac{\underline{w}_1}{a} \right) + 2b \operatorname{ar} \coth (a \underline{w}_1) \quad (25)$$

die obere Hälfte der w_1 -Ebene auf das Innere des Bereichs abbildet und die reelle Achse entsprechend Bild 5.13a auf die Berandung.

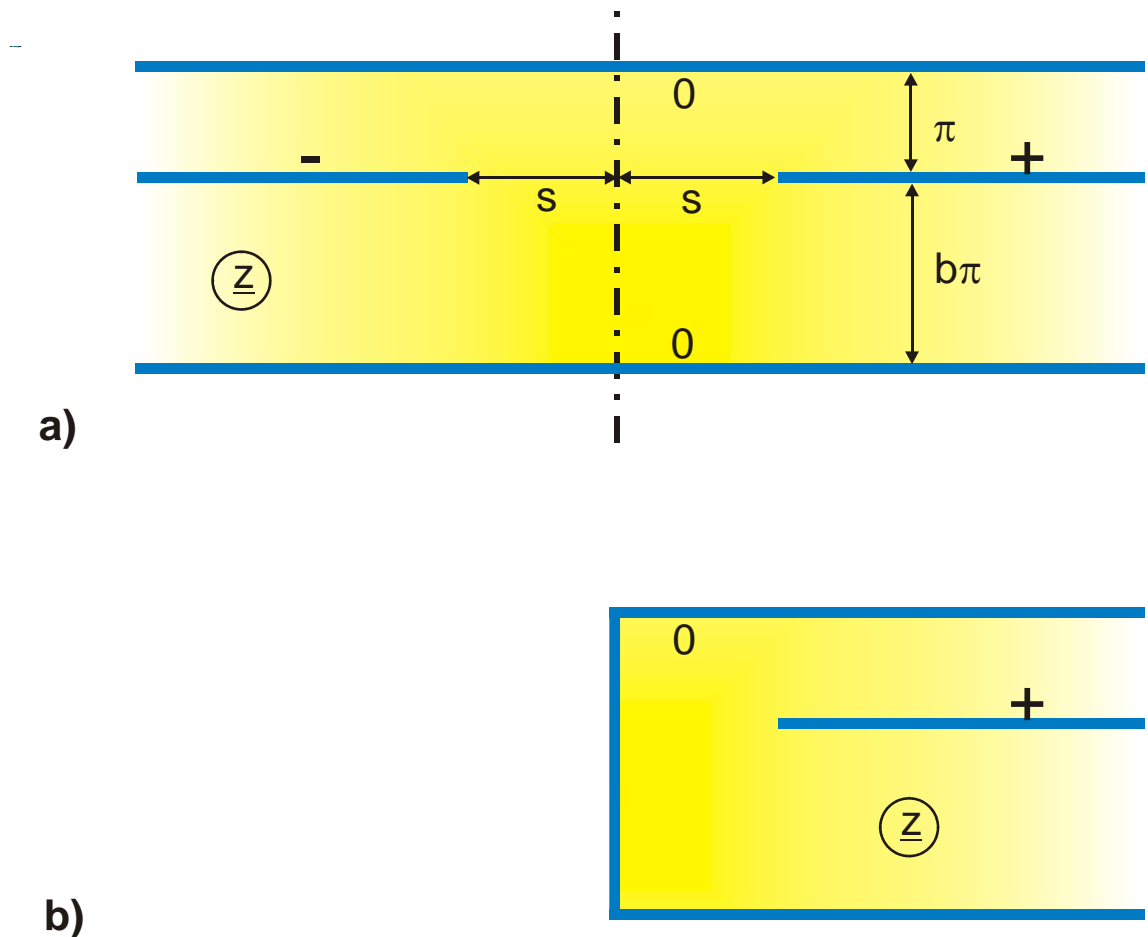


Bild 5.12: Beispiel 6

Im nächsten Schritt wird nun eine Vorabbildung gesucht, mit der die Berandung FGH in Bild 5.13b ein konstantes Potential u_1 erhält und die Berandung FEAH ein davon verschiedenes, konstantes Potential u_2 . In der w_1 -Ebene berühren sich diese beiden Ränder in den Punkten F und H. Dort wird die Feldstärke unendlich groß. Die gesuchte Vorabbildung hat also eine Linienladung im Punkt F und eine weitere im Punkt H. Da außerdem die Strecke AE eine Potentiallinie sein soll, ergibt sich eine Ladungsverteilung wie in Bild 5.13d, um die gesuchte Potentialverteilung zu erreichen. Die dazugehörige Abbildungsfunktion ergibt sich aus dem Abbildungsverzeichnis zu (Abb. L 4 mit $p = a^2$, multipliziert mit $1/a$ und um -90° gedreht):

$$\underline{w}_1 = -\frac{j}{a} \sqrt{\frac{\exp(\underline{w} \pi) - a^4}{1 - \exp(\underline{w} \pi)}}. \quad (26)$$

In Bild 5.13e ist angedeutet, daß die beiden Linienladungen in der Bildebene bei $+\infty$ liegen. Sie erzeugen das zunächst homogene Feld oberhalb und unterhalb des Blechs, das dann im Bereich der Punkte E, G und A in ein inhomogenes Feld übergeht. Beim Umfahren der Berandung in Bild 5.13b kehrt sich in den Punkten C und G jeweils die Laufrichtung um. Mathematisch formuliert heißt dies

$$\left. \frac{d \underline{z}}{d \underline{w}_1} \right|_{\underline{w}_1 = a} = 0. \quad (27)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Parameter a und eingesetzt in Gl. (25) die Abmessung s . Alle anderen Größen ergeben sich wie im vorangegangenen durch Einsetzen der jeweiligen Punkte. Die Ergebnisse sind bei Abb. D 5 zusammengestellt.

Damit ist das gesuchte Feldbild berechnet. Durch die Wahl anderer, geeigneter Vorabbildungen ergeben sich aus Gl. (25) die Abbildungen H 6.7, H 6.8, H 6.9 und H 6.10.

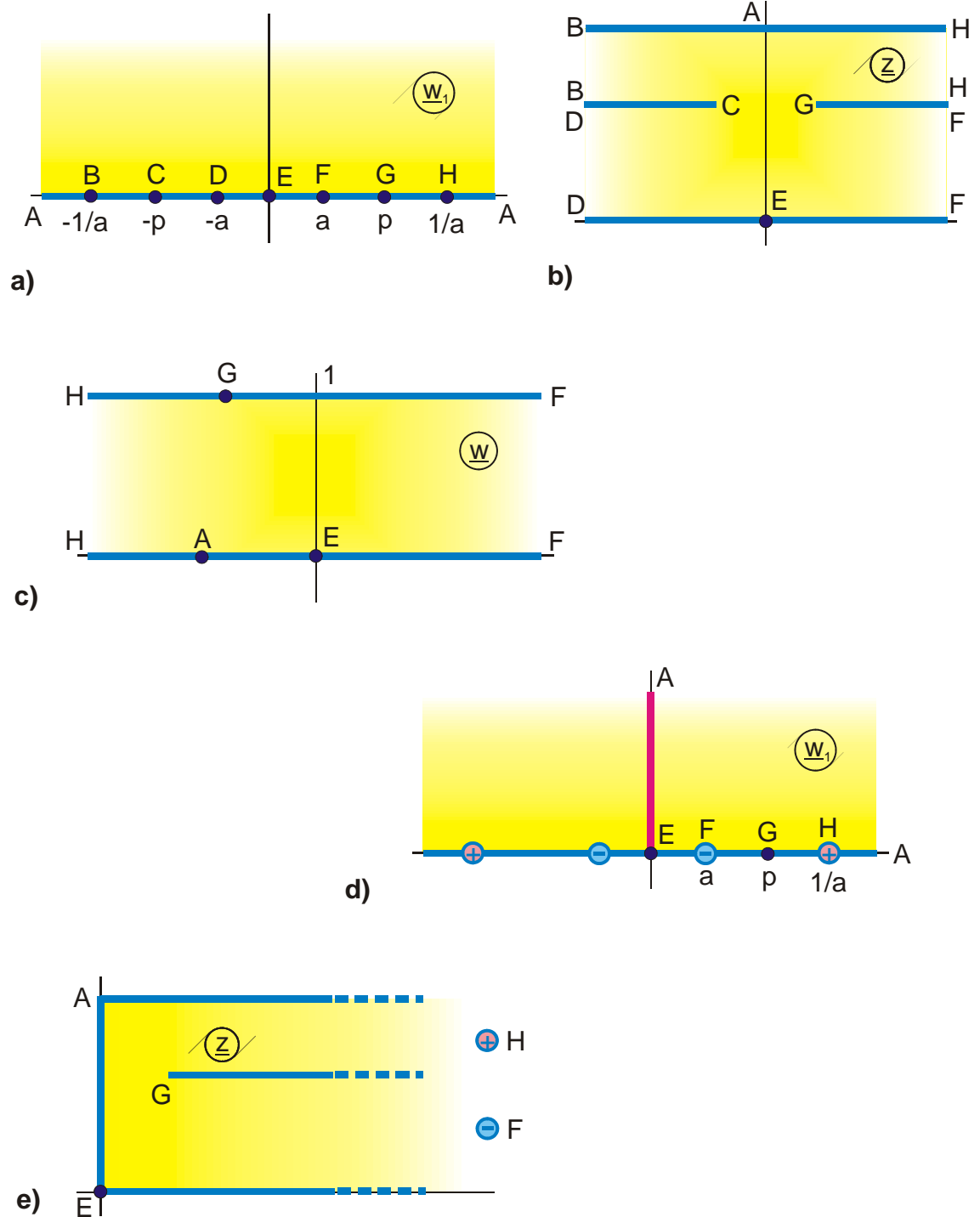
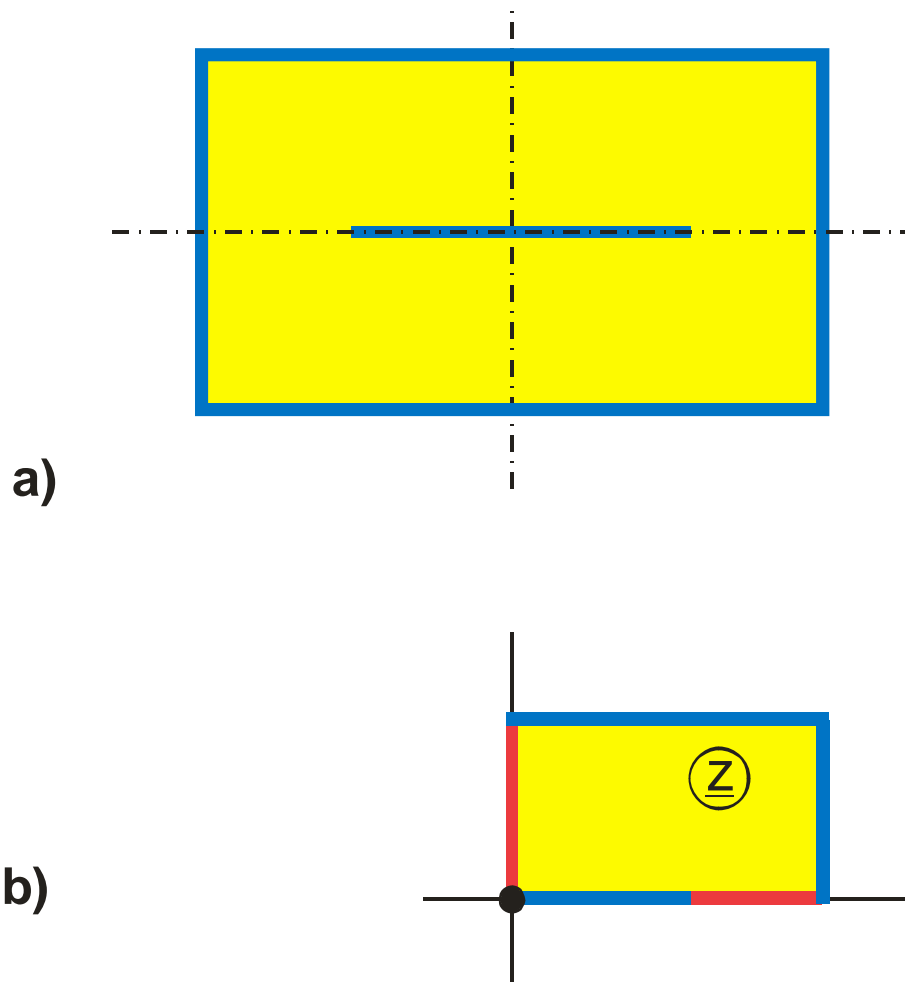


Bild 5.13: Lösungsweg zu Beispiel 6

Beispiel 7: Rechteckiger Außenleiter, symmetrisch angeordneter, streifenförmiger Innenleiter

Bild 5.14a zeigt die Elektrodenanordnung, deren Feldbild gesucht wird. Aufgrund der Symmetrie ist es ausreichend, den in Bild 5.14b gezeigten Rechteckbereich zu betrachten. Zur Abbildung des I. Quadranten auf das Innere eines Rechtecks wird das elliptische Integral 1. Art benutzt (Kap. 12, Bild 4).

$$\underline{z} = F_a(\underline{w}_1, k_1) . \quad (28)$$



**Bild 5.14: Beispiel 7, a) physikalisches Problem,
b) Abbildungsproblem**

In der \underline{w}_1 -Ebene muß durch eine geeignete Vorabbildung erreicht werden, daß die Geraden \overline{AB} und \overline{CDE} Potentiallinien und die Geraden \overline{AE} und \overline{BC} Feldlinien sind (Bild 5.15c). Die Zuordnung Potentiallinie und Feldlinie kann natürlich auch vertauscht werden. Als dazugehörige Abbildungsfunktion findet man entweder mit Kap. 11 Bild 2 oder aus dem Abbildungsverzeichnis mit Abb. E 3:

$$\underline{w}_2 = \operatorname{sn}(\underline{w}, k) . \quad (29)$$

Damit der Punkt C wie gefordert bei 1 liegt, wird die Funktion mit k multipliziert.

$$\underline{w}_1 = k \cdot \underline{w}_2 = k \cdot \operatorname{sn}(\underline{w}, k) . \quad (30)$$

Damit lautet die Lösung der gestellten Aufgabe

$$\underline{z} = F_a(k \cdot \operatorname{sn}(\underline{w}, k), k_1) . \quad (31)$$

Diese Funktion bildet ein Rechteck (Bild 5.15a) auf ein anderes Rechteck (Bild 5.15d) ab. Wie man leicht sieht, lassen sich durch Vergrößern und/oder Verschieben der roten Geraden \overline{BC} beim Übergang von \underline{w}_2 auf \underline{w}_1 weitere, andere Abbildungen erzeugen (z.B. Abb. I 2.2, I 2.3 und I 2.6). In Analogie zu Beispiel 1 kann man außerdem Linienladungen in ein Rechteck einbringen (Abbildungsgruppe I, z.B. I 1) oder Dipole (Gruppe Q, z.B. Q 4).

Um die Abbildung auf ein Rechteck mit der Seitenlänge 1 und dem Seitenverhältnis τ zu normieren, wird die Abbildungsfunktion durch $K(k_1)$ geteilt (Abb. I 2):

$$\underline{z} = F_a(k \cdot \operatorname{sn}(\underline{w}, k), k_1) / K(k_1) . \quad (32)$$

Durch Einsetzen von Punkt B ergibt sich

$$d = F_a(k, k_1) / K(k_1) . \quad (33)$$

Diese Gleichung läßt sich nach k auflösen:

$$k = \operatorname{sn}(d \cdot K(k_1), k_1) . \quad (34)$$

Wenn das Seitenverhältnis τ gegeben ist, ergibt sich k_1 zu (Gl. 13.13):

$$k_1 = \left(\vartheta_2(\tau, 0) / \vartheta_3(\tau, 0) \right)^2 . \quad (35)$$

Punkt D ergibt sich in der w-Ebene durch Einsetzen:

$$\frac{1}{k_1} = k \operatorname{sn}[u_D + j K'(k), k] \Rightarrow u_D = \operatorname{Re} F_a\left(\frac{1}{k k_1}, k\right) . \quad (36)$$

Damit sind alle Parameter und Koordinaten dieser Abbildung bekannt.

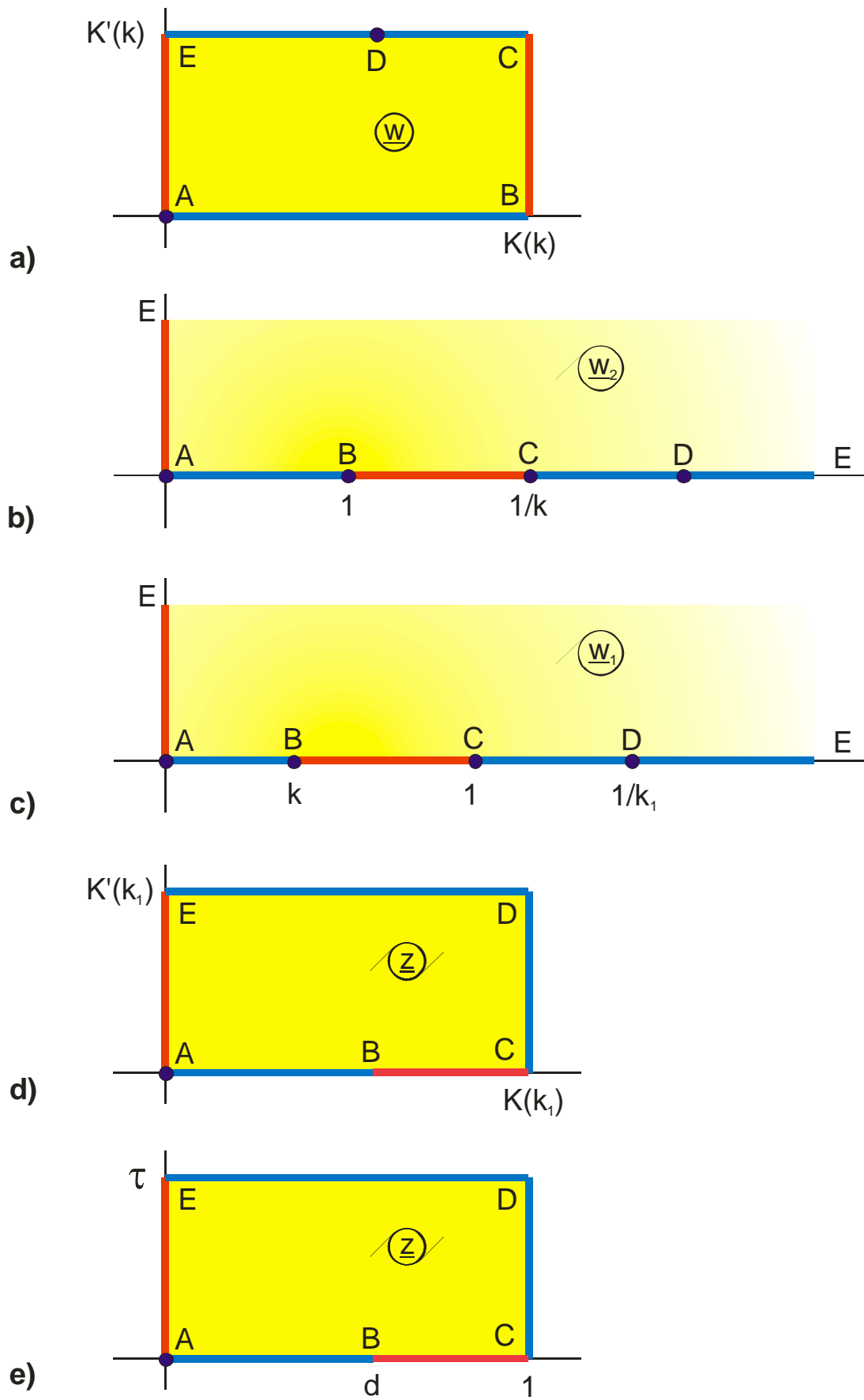


Bild 5.15: Abfolge der Vorabbildungen für Beispiel 7

Beispiel 8: 3-Streifen-Leitung

Bild 5.16a zeigt einen Leiterstreifen symmetrisch zwischen zwei weiteren Streifen. Bild 5.16b ist die Reduktion auf den I. Quadranten. In Kenntnis der Methode der Vorabbildung wird zur Berechnung des Feldbildes eine Abbildung gesucht, deren äußere Kontur dem Bild 5.16b entspricht, wobei die Potentialverteilung entlang der Kontur beliebig sein kann. Aus Kap. 12, Bild 11 bzw. aus Abb. E 2 ergibt sich die Zeta-Funktion:

$$\underline{z} = Z_e(\underline{w}_1, k'_1) + ja \quad (37)$$

Damit wird der I. Quadrant des gesuchten Feldbildes auf das Innere eines Rechtecks abgebildet (Bild 5.17c, d). Die Vorabbildung, die benötigt wird, um in diesem Rechteck die gesuchte Potentialverteilung entlang des Randes zu erzeugen (Bild 5.17c) ist bereits aus Beispiel 7 bekannt. Die Abbildung

$$\underline{w}_2 = F_a(k \cdot \operatorname{sn}(\underline{w}, k), k_1) \quad (38)$$

(Bild 5.17a, b) muß nur noch um 90° gedreht und um $K'(k_1)$ verschoben werden

$$\underline{w}_1 = K'(k_1) + j \underline{w}_2 \quad (39)$$

Beim Drehen eines Rechtecks um 90° muß berücksichtigt werden, daß

$$K(k'_1) = K'(k_1) \quad (40)$$

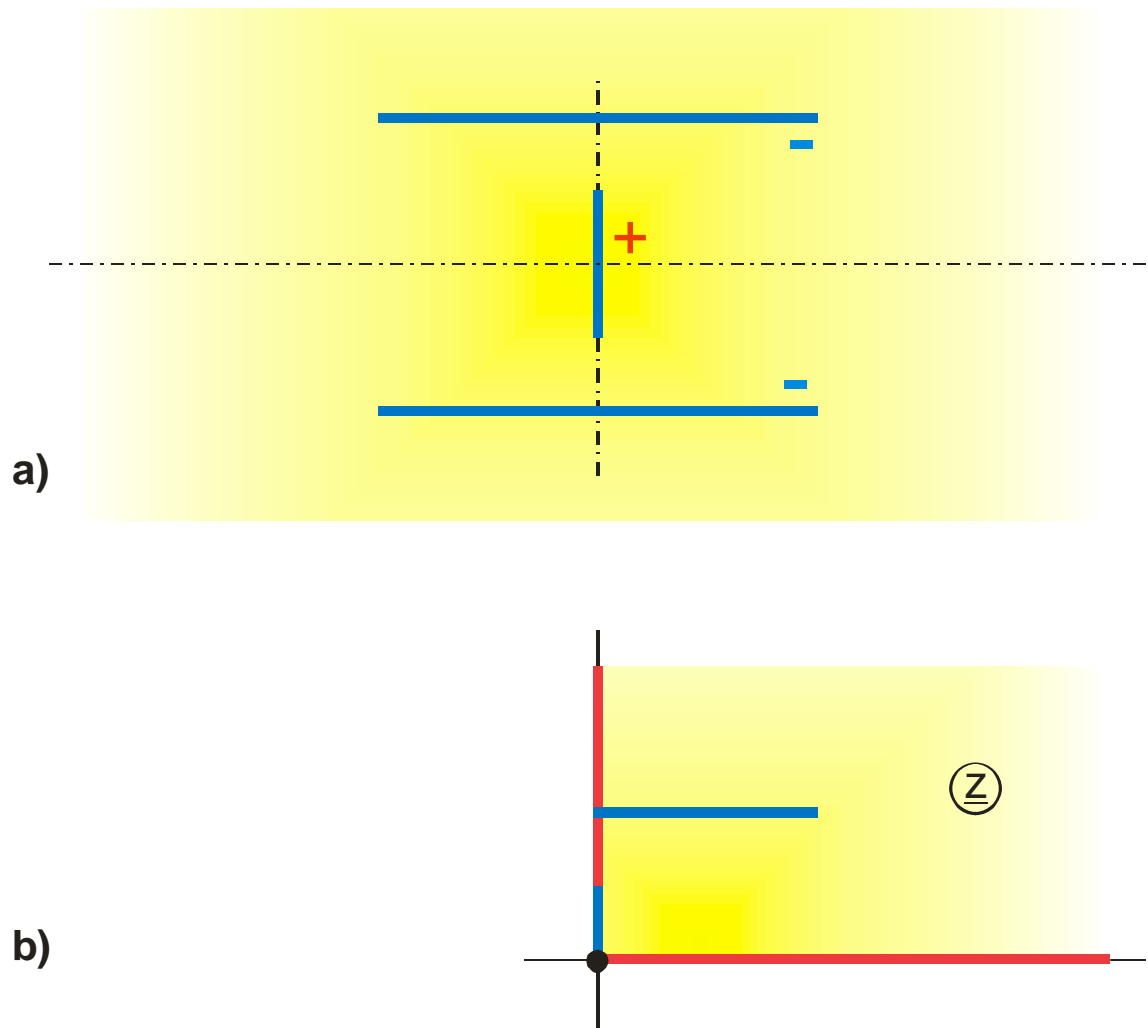
und

$$K'(k'_1) = K(k_1) \quad (41)$$

gilt; d.h. der Modul wechselt von k'_1 nach k_1 bzw. allgemein von k nach k' .

Damit ist dieses Abbildungsproblem gelöst. Die Parameter sind bei Abb. P 5.4 angegeben. Sie ergeben sich wie gehabt durch Einsetzen der einzelnen Punkte in die Abbildungsfunktion. Wie man aus Bild 5.17 unmittelbar entnehmen kann, ist es durch eine

andere, ähnliche Vorabbildung leicht möglich, den Mittelleiter der 3-Streifen-Leitung um 90° zu drehen, sodaß alle 3 Streifen parallel zueinander verlaufen (Abb. P 5.3).



**Bild 5.16: Beispiel 8 a) physikalisches Problem,
b) Abbildungsproblem**

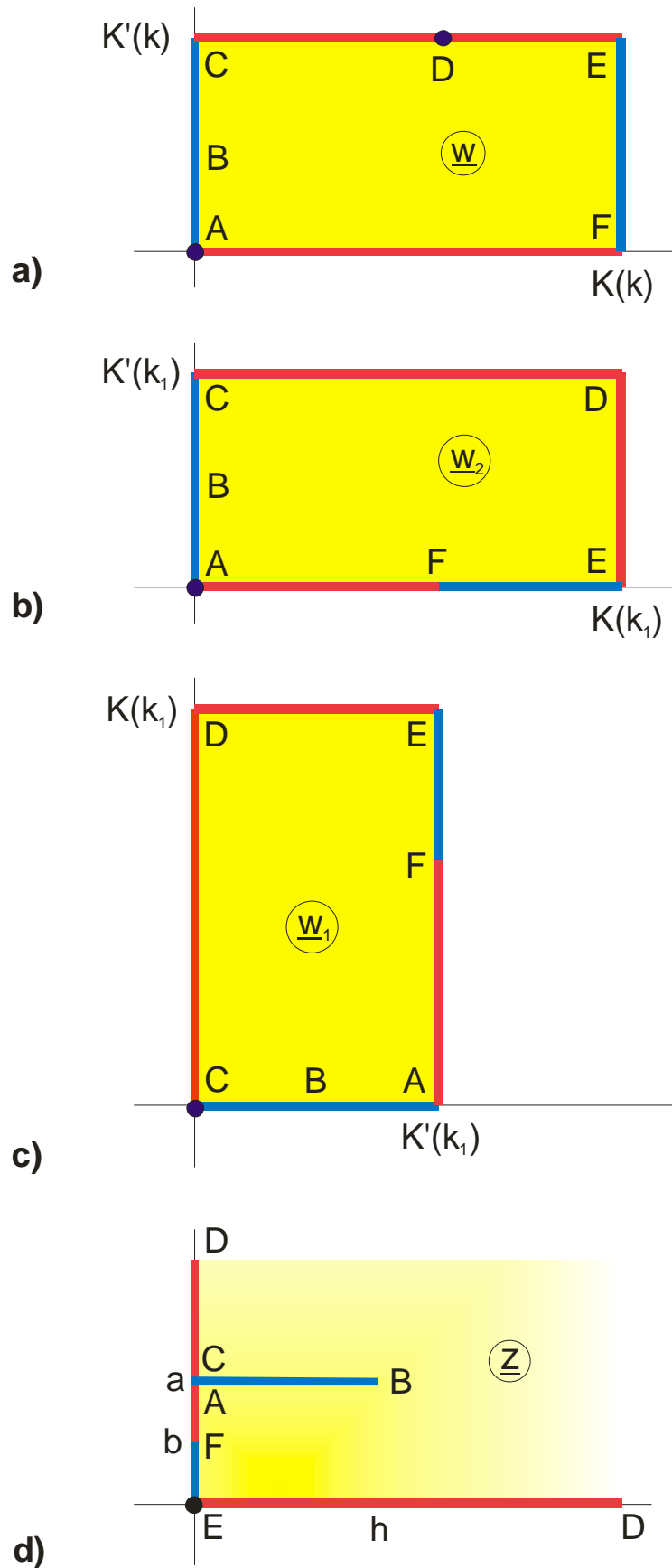


Bild 5.17: Reihenfolge der Vorabbildungen für Beispiel 8

6. Folgeabbildungen

Eine gegebene Abbildung $f_1(\underline{w})$ kann durch eine zweite Abbildung $f_2(\underline{w})$ erneut abgebildet werden. Damit ist es möglich, eine gegebene Abbildung $f_1(\underline{w})$ gezielt zu verändern. Die Vorgehensweise ist dabei folgende:

$$\text{gegebene Abbildung: } \underline{w}_1 = f_1(\underline{w}) \quad (1)$$

$$\text{Folgeabbildung: } \underline{z} = f_2(\underline{w}_1) \quad (2)$$

$$\text{Endergebnis: } \underline{z} = f_2[f_1(\underline{w})]. \quad (3)$$

Drei Folgeabbildungen hintereinander:

$$\underline{z} = f_4(f_3(f_2(f_1(\underline{w})))) \quad (4)$$

Das Verfahren ist also ähnlich dem der Vorabbildung. Lediglich die Reihenfolge der Abbildungen ist umgekehrt. Wesentlicher Unterschied ist, daß die Ränder der gegebenen Abbildung durch die Folgeabbildung verformt werden. Einer ersten Folgeabbildung können weitere folgen.

Was in dieser Schreibweise sehr kompliziert aussieht, ist in der Praxis einfach, da man jede einzelne Folgeabbildung für sich betrachten und berechnen kann.

$$\begin{aligned} \text{gegeben: } \underline{w}_1 &= f_1(\underline{w}) \\ \text{1. Schritt: } \underline{w}_2 &= f_2(\underline{w}_1) \\ \text{2. Schritt: } \underline{w}_3 &= f_3(\underline{w}_2) \\ \text{3. Schritt: } \underline{z} &= f_4(\underline{w}_3) \end{aligned} \quad (5)$$

Das Verfahren ähnelt dem Lösen eines Integrals durch mehrere Substitutionen in Folge. Allerdings mit dem Unterschied, daß man, wie im folgenden gezeigt wird, zielgerichtet

und anschaulich interpretierbar zu dem gewünschten Ergebnis kommen kann. So sind z.B. bei Abb. R 7.2 im Abbildungsverzeichnis fünf Abbildungen in Folge durchgeführt worden. Genaugenommen sind es noch mehr Folgeabbildungen, da sich z.B. die erste Abbildungsfunktion, wie im folgenden Beispiel 1 gezeigt wird, bereits in drei Folgeabbildungen zerlegen läßt.

Neben der Anschaulichkeit und Einfachheit aufgrund der Aufteilung in einfache Einzelschritte hat die Methode der Folgeabbildungen den weiteren Vorteil, daß sich in der Regel die Umkehrfunktion der Abbildungsfunktion sehr einfach berechnen läßt (vgl. Abbildung R 7.2).

Umkehrfunktion zu Gl. (4):

$$\begin{aligned}\underline{w}_3 &= f_4^{-1}(\underline{z}) \\ \underline{w}_2 &= f_3^{-1}(\underline{w}_3) \\ \underline{w}_1 &= f_2^{-1}(\underline{w}_2) \\ \underline{z} &= f_1^{-1}(\underline{w}_1).\end{aligned}\tag{6}$$

Die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Vorabbildungen sind im Grunde genommen kein eigenständiges Verfahren, sondern lassen sich ebenfalls als Folgeabbildungen interpretieren.

6.1 Die Funktion $\underline{z} = \underline{w}_1^{\varphi/\pi}$

Einige grundsätzliche Möglichkeiten, eine gegebene Abbildung $\underline{w}_1(\underline{w})$ durch eine Folgeabbildung mit der Funktion $\underline{z} = \underline{w}_1^{\varphi/\pi}$ zu verändern, sind in Bild 6.1 zusammengestellt.

In Bild 6.1a wird aus dem Feldbild eines dünnen Streifenleiters gegen ∞ (Abb. B 2) nach dem Verschieben aus dem Nullpunkt heraus mit $\underline{z} = \underline{w}_1^{1/2}$ das Feldbild zweier dünner Streifenleiter, symmetrisch angeordnet, mit gleichgroßer Ladung (Abb. S 2.2). Durch den Exponenten $1/2$ wird die negative reelle Achse um 90° hochgeklappt und bildet die Symmetrieebene der neuen Abbildung.

In Bild 6.1b wird aus dem Feldbild zweier symmetrisch angeordneter dünner Streifenleiter mit entgegengesetzt gleich großer Ladung (Abb. E 3) mit $\underline{z} = \underline{w}_1^2$ das Feldbild eines dünnen Leiterstreifens gegen eine dünne Blechkante (Abb. K 3). In diesem Fall wird die positive imaginäre Achse um 90° nach links geklappt und ergibt die Blechkante der neuen Abbildung. Aus der gleichen Abbildung E 3 ergibt sich nach Verschieben um $+1$ mit $\underline{z} = \underline{w}_1^{1/2}$ eine symmetrische Drei-Streifen-Leitung (Bild 6.1c). Dies ist ein Sonderfall von Abbildung P 5. Da sich bei dieser Abbildung die Streifenleiterbreiten nicht unabhängig voneinander verändern lassen, wurde für Abb. P 5 eine andere Folgeabbildung benutzt. Alternativ kann man aber auch mit $\underline{z} = \underline{w}_1^{1/2}$ zu diesem allgemeinen Ergebnis kommen, wenn man als Ausgangsabbildung das Feldbild zweier ungleich großer Leiterstreifen gegeneinander benutzt (Abb. F 5.1).

Mit der Folgeabbildung $\underline{z} = \underline{w}_1^{q/\pi}$ bleiben alle Elemente entlang der positiv reellen Achse erhalten. Sie lassen sich auf diese Art verdoppeln oder zu symmetrischen Mehrleiteranordnungen erweitern.

Weiterhin ergibt sich mit dieser Folgeabbildung ein großer Teil der radialsymmetrischen Abbildungen der Gruppe G. Die Vorgehensweise ist in Bild 6.1d erläutert. Ausgehend von Abb. F 3, dem Feldbild einer Koaxialleitung mit einem längsgeschlitzten, dünnen Außenleiter, wird durch die Folgeabbildung $\underline{z} = \underline{w}_1^{1/n}$ ein Feldbild im Winkelbereich von 0 bis π/n erzeugt, das sich symmetrisch zum Feldbild einer Koaxialleitung mit einem gleichmäßig, n -fach geteilten Außenleiter ergänzen läßt (Abb. G 4). Alle

Elemente, die sich auf konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt befinden, werden durch die Folgeabbildung $\underline{z} = \underline{w}_1^{\varphi/\pi}$ ebenfalls nicht verändert.

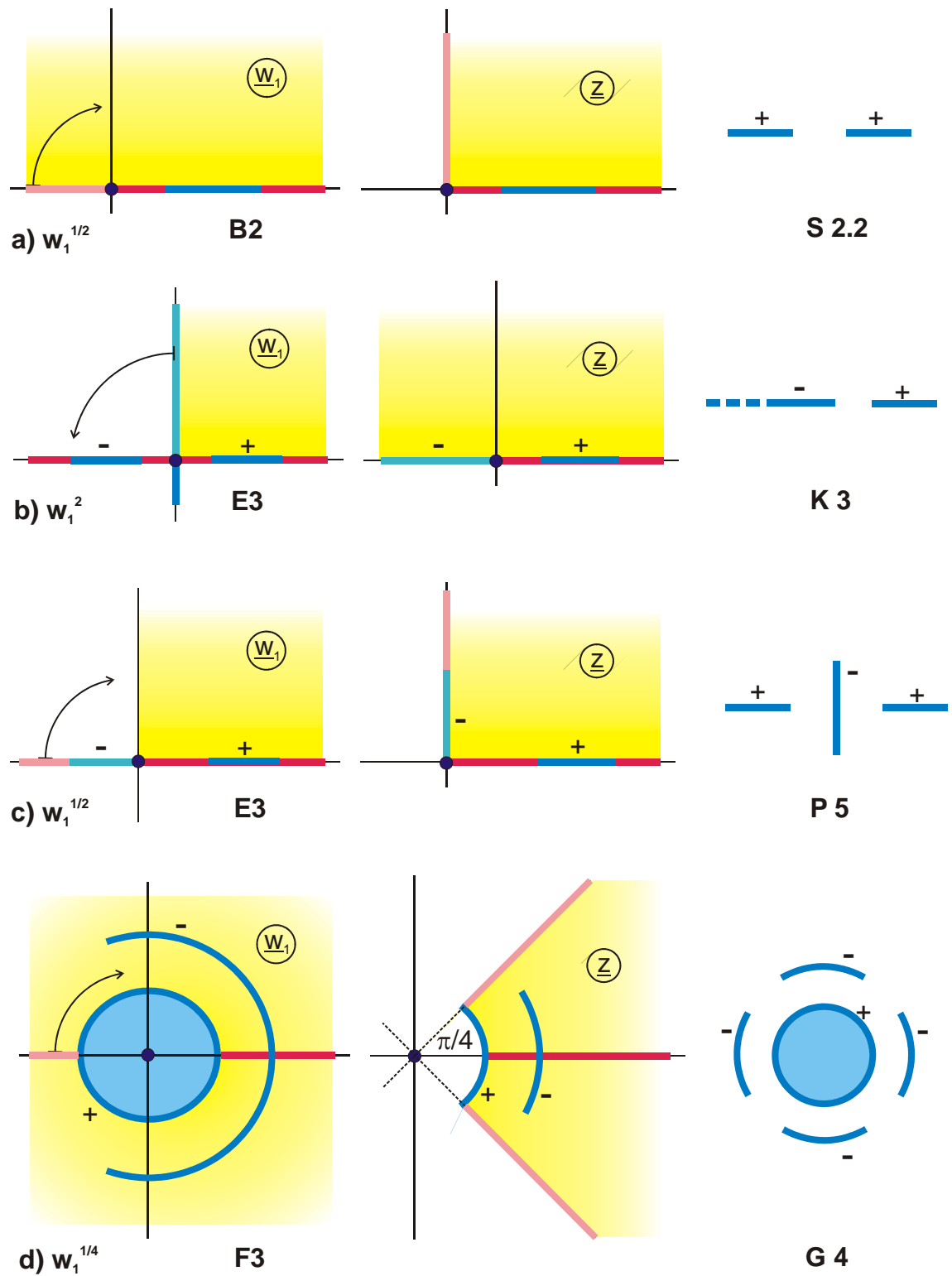


Bild 6.1: Die Folgeabbildung $\underline{z} = \underline{w}_1^{\varphi/\pi}$

Beispiel 1: Leitende Ebene mit herausragender Schneide

Abbildung 2.1 ist ein Beispiel für das zweimalige Anwenden der Folgeabbildung $\underline{z} = \underline{w}_1^{\varphi/\pi}$. Entsprechend der Reihenfolge der Bilder in Bild 6.2 wird aus dem homogenen Feld \underline{w} mit $\underline{w}_1 = \underline{w}^2$ das Feldbild einer dünnen Blechkante. Diese wird um -1 verschoben mit $\underline{w}_2 = \underline{w}_1 - 1$ und anschließend aufgebogen zum gesuchten Endergebnis mit $\underline{z} = \sqrt{\underline{w}_2}$. Setzt man die Gleichungen ineinander ein, ergibt sich mit $\underline{z} = \sqrt{\underline{w}^2 - 1}$ die Abb. A 2.1.

Zusammenfassung: Mit der Folgeabbildung $\underline{z} = \underline{w}_1^{\varphi/\pi}$ lassen sich unter anderem Abbildungen symmetrisch ergänzen bzw. radialsymmetrische Anordnungen erzeugen. Alle Elemente, die sich auf Strahlen durch den Nullpunkt und auf konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt befinden, bleiben erhalten.

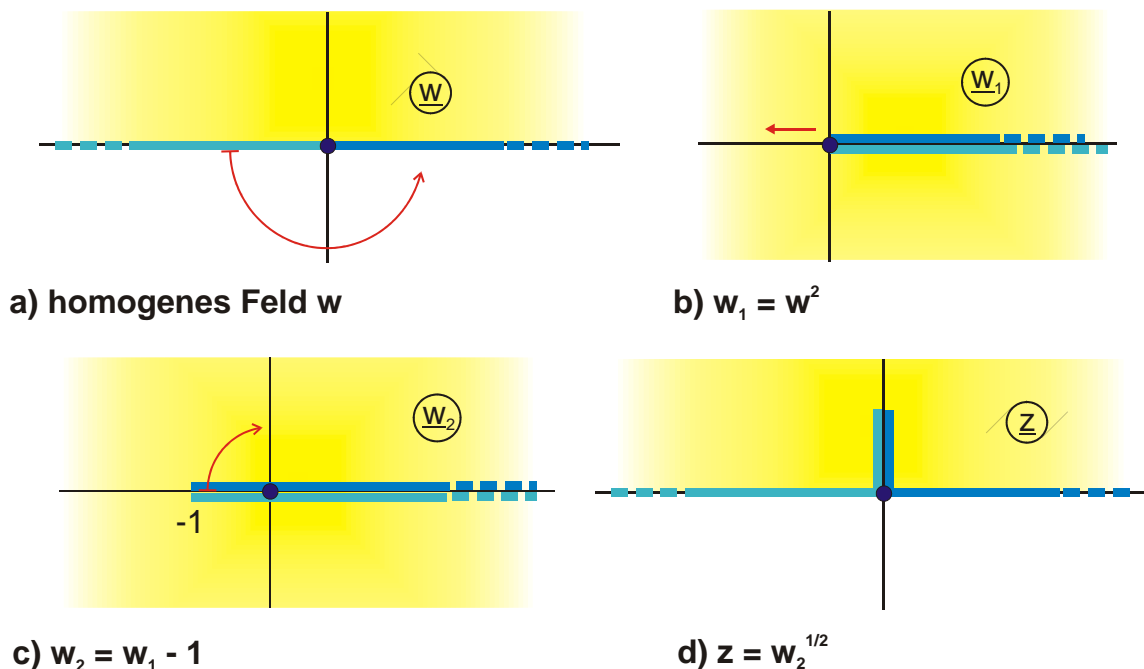


Bild 6.2: Beispiel 1, $\underline{z} = \sqrt{\underline{w}^2 - 1}$, Abb. A 2.1

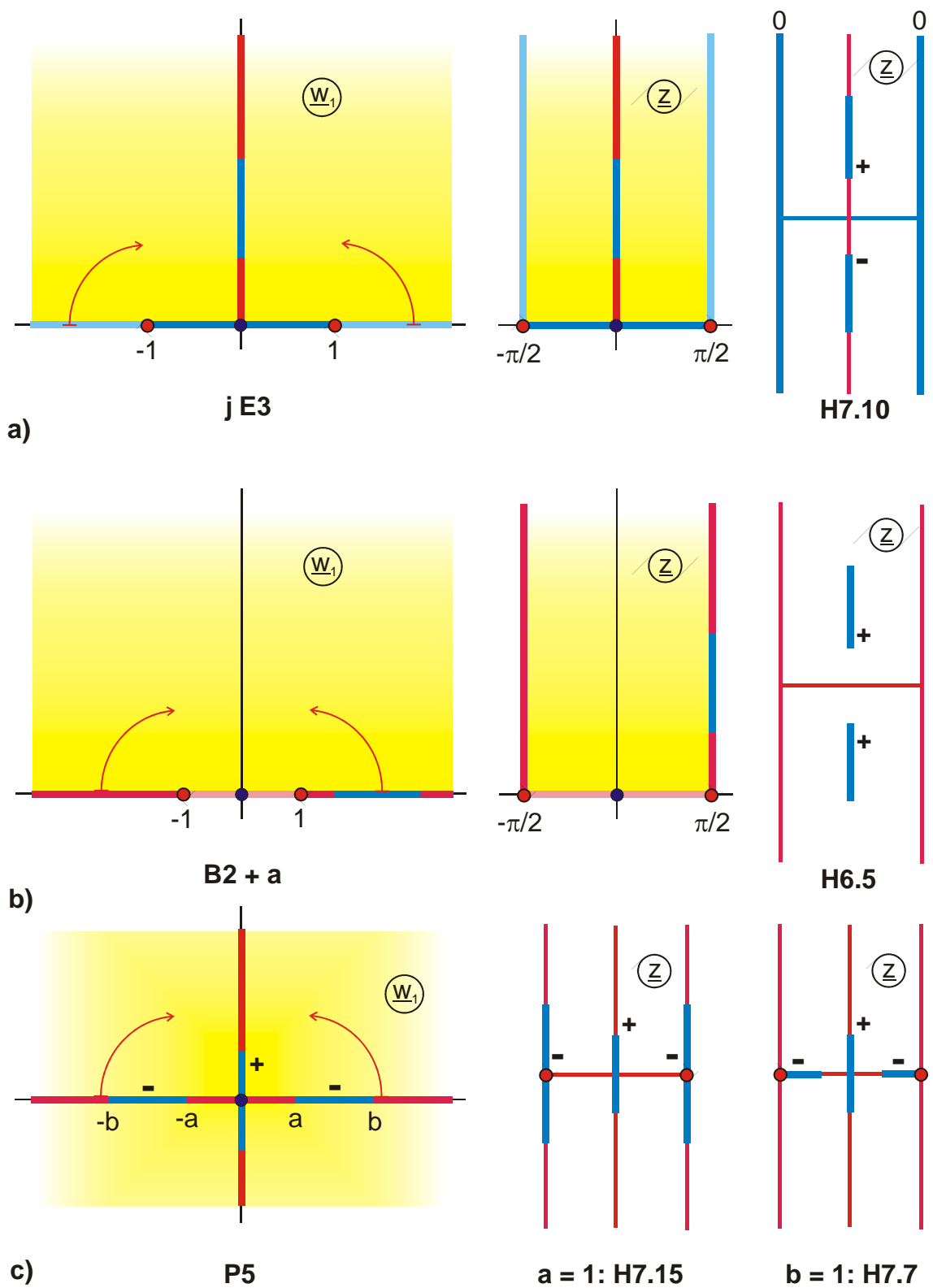
6.2 Arkussinus

Bild 6.3 gibt eine Übersicht, welche Veränderungen einer gegebenen Abbildung \underline{w}_1 durch eine Folgeabbildung mit dem Arkussinus möglich sind. In allen drei Beispielen wird die reelle Achse bei ± 1 jeweils um 90° nach oben und nach unten geklappt, so daß ein Parallelstreifen der Breite π entsteht. Alle so gewonnenen Abbildungen sind einfach periodisch (Abbildungsgruppe H) entlang der reellen Achse. Alle Elemente entlang der reellen Achse und entlang der imaginären Achse der Ausgangsabbildung \underline{w}_1 bleiben in ihrer Form erhalten (Ausnahme: siehe Abb. H 6.3). Elemente, die auf der reellen Achse zwischen -1 und $+1$ liegen, werden auf die reelle Achse der z -Ebene zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ abgebildet; alle Elemente außerhalb werden auf die Geraden $\pm\pi/2 \pm jy$ abgebildet.

In Bild 6.3c ergeben sich dadurch zwei verschiedene Ergebnisse, je nachdem, ob man in der \underline{w}_1 -Ebene $a = 1$ oder $b = 1$ setzt. [Im ersten Fall wird die Funktion \underline{w}_1 durch a geteilt, im zweiten Fall durch b].

Die Folgeabbildung mit dem Arkussinus läßt sich sinnvoll anwenden, wenn die reelle Achse der \underline{w}_1 -Ebene für $|u_1| \geq 1$ durchgehend aus Feldlinienstücken und/oder Potentiallinienstücken besteht. Dann ergibt sich eine einfach periodische Funktion, die bei $x = \pm \pi/2$ durch Spiegeln periodisch fortgesetzt werden kann.

Folgeabbildungen mit den Funktionen $\arccos \underline{w}_1$, $\operatorname{ar sinh} \underline{w}_1$ und $\operatorname{ar cosh} \underline{w}_1$ ergeben gleichartige Abbildungen (siehe Bild 2.5 bzw. Gl. (2.10) bis (2.12)).

Bild 6.3: Folgeabbildungen mit $\underline{z} = \arcsin \underline{w}_1$

6.3 Sinus

Die Sinusfunktion als Umkehrfunktion des Arkussinus erzeugt entsprechend die umgekehrte Abbildung. Wie in Bild 6.4 skizziert, wird ein Parallelstreifen in der w_1 -Ebene auf die gesamte z -Ebene abgebildet. Elemente entlang des Randes des Parallelstreifens und entlang der imaginären Achse bleiben in ihrer Form erhalten. Eine horizontale Gerade geht über in eine Ellipse.

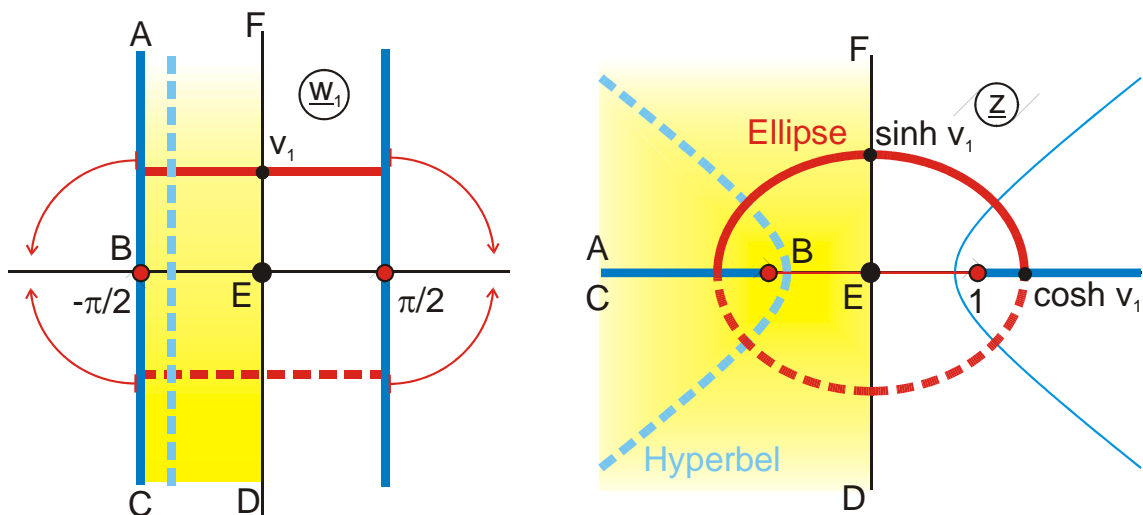


Bild 6.4: Folgeabbildungen mit $z = \sin w_1$

Beispiel 2: Vertikaler Streifenleiter in horizontalem Schlitz

Um das gesuchte Feldbild zu erhalten, wird von Beispiel 5.2 ausgegangen. Dort war ein Streifenleiter zwischen zwei parallelen Blechen berechnet worden (Bild 6.5a).

$$w_1 = \ln [sn(\underline{w}, k)] \quad (7)$$

Zunächst wird dieses Feldbild um 90° gedreht und um die Strecke a verschoben (Bild 6.5b).

$$\underline{w}_2 = j(a - \underline{w}_1). \quad (8)$$

Dann ergibt die Folgeabbildung mit der Sinusfunktion das gesuchte Ergebnis (Bild 6.5c):

$$\underline{z} = \sin \underline{w}_2. \quad (9)$$

Die Abstände b und c ergeben sich zu:

$$jb = \sin[j(a-d)] \Rightarrow b = \sinh(a-d) \quad (10)$$

$$jc = \sin(ja) \Rightarrow c = \sinh a. \quad (11)$$

Auf die gleiche Art ergibt sich Abb. P 2.3 aus Abb. H3, Abb. P 2.2 aus Abb. H 2.1 und Abb. P 3.7 aus Abb. H 1.6.

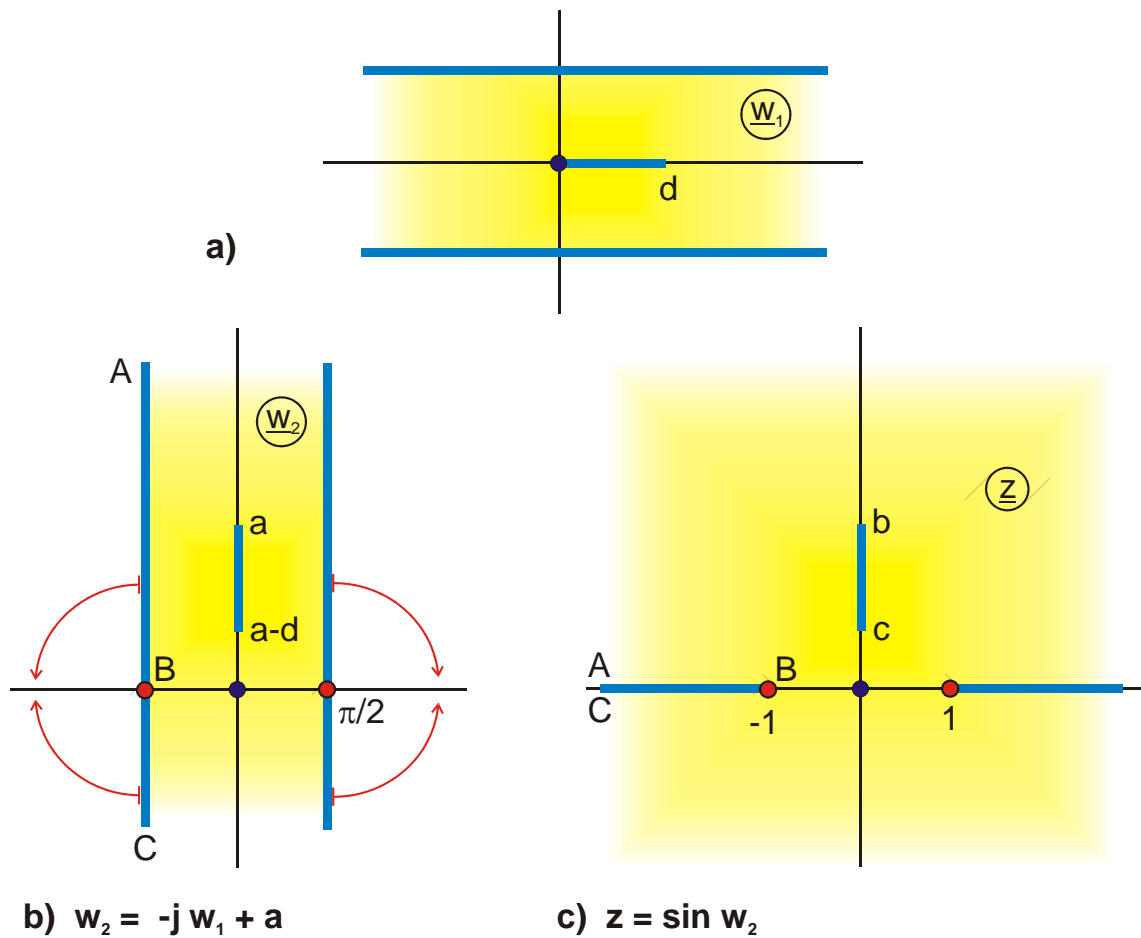


Bild 6.5: Beispiel 2, Abb. P 4.1

Beispiel 3: Streifenleiter in elliptischem Außenleiter

Um das Feldbild eines Streifenleiters zu erhalten, der sich zentrisch im Innern eines elliptischen Außenleiters befindet, könnte man zunächst entsprechend Kap. 5 Beispiel 3 die Abbildungsfunktion $\underline{z} = \cosh(\pi \underline{w})$ benutzen (Abb. B 2). In diesem Feldbild eines Streifenleiters gegen ∞ sind alle Potentiallinien Ellipsen. Diese Abbildung hat allerdings nur einen frei wählbaren Parameter v_1 . Für $a = 1$ gilt (Bild 5.4):

$$b = \tanh v_1 \quad (12)$$

$$\text{und} \quad d = 2 / \cosh v_1. \quad (13)$$

Mit v_1 wird also sowohl b als auch d festgelegt.

In der Praxis vielseitiger anwendbar wäre dagegen ein Feldbild, bei dem das Seitenverhältnis b/a der Ellipse und die Streifenleiterbreite d unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Um dies zu erreichen, wird in Abb. I 2.2 (Bild 6.6a)

$$\underline{w}_1 = F_a \left(\frac{k}{k_1} \operatorname{sn}(\underline{w}, k), k_1 \right), \quad (14)$$

die analog zu Beispiel 5.7 erzeugt wird, zunächst die Breite des Rechtecks auf $\pi/2$ normiert

$$\underline{w}_2 = \frac{\underline{w}_1}{K(k_1)} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

Dann wird das Rechteck durch die Folgeabbildung mit der Sinusfunktion in eine Ellipse umgewandelt. Entsprechend Bild 6.4 geht bei dieser Folgeabbildung eine zur reellen Achse parallele Gerade in einen Ellipsenbogen über.

$$\underline{z} = \frac{\sin \underline{w}_2}{\cosh(\tau \cdot \pi/2)} \quad (16)$$

Um die große Halbachse der Ellipse auf die Länge 1 zu normieren, wurde die Abbildung zusätzlich durch $\cosh(\tau \cdot \pi/2)$ dividiert. Die kleine Halbachse b wird damit zu

$$b = \frac{\sinh(\tau \cdot \pi/2)}{\cosh(\tau \cdot \pi/2)} = \tanh(\tau \cdot \pi/2). \quad (17)$$

Sofern das Seitenverhältnis der Ellipse vorgegeben ist, also mit $a = 1$ die Größe von b , ergibt sich daraus τ zu

$$\tau = \frac{2}{\pi} \operatorname{ar} \tanh b. \quad (18)$$

τ ist das Seitenverhältnis des Ausgangsrechtecks in Abb. I 2.2. Mit τ wird der (komplementäre) Modul k_1 des elliptischen Integrals 1. Art festgelegt (siehe Kap. 13 und 14):

$$k_1 = \left[\vartheta_2(0, \tau) / \vartheta_3(0, \tau) \right]^2. \quad (19)$$

Die Strecke \overline{AE} im ursprünglichen Rechteck in der w_1 -Ebene hat die Länge f . Entsprechend Abb. I 2.2 wird f durch den Modul k der sn -Funktion festgelegt:

$$k = k_1 \cdot \operatorname{sn}(f, k_1). \quad (20)$$

Setzt man $\underline{w}_1 = f$ in Gl. (14), so ergibt sich die Streifenleiterbreite d aus Gl. (16). Bildet man die Umkehrfunktion aller drei Folgeabbildungen, läßt sich f und damit k als Funktion von d darstellen:

$$k = k_1 \cdot \operatorname{sn} \left\{ \frac{2}{\pi} K(k_1) \cdot \arcsin(a \cdot d), k_1 \right\}. \quad \text{für } k \leq k_1 \quad (21)$$

Für den in Bild 6.6b dargestellten Fall eines sehr breiten Streifenleiters d , ergibt die analoge Rechnung:

$$k = k_1 \cdot \operatorname{Re} \operatorname{sn} \left\{ K(k_1) + j \frac{\pi}{2} K(k_1) \operatorname{arcosh}(a \cdot d), k_1 \right\}. \quad \text{für } k > k_1 \quad (22)$$

Damit sind alle Parameter dieser Abbildung bekannt.

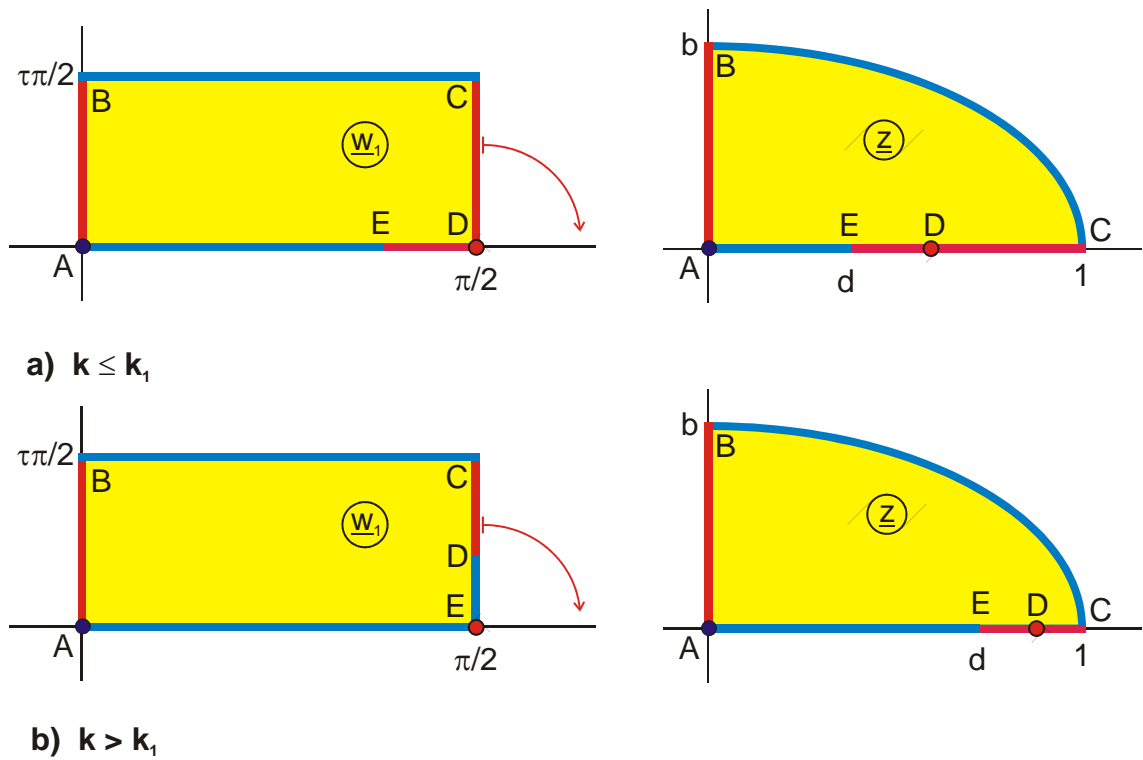


Bild 6.6: Beispiel 3, Abb. F 4.1

Beispiel 4: Streifenleiter in einem geschlitzten, elliptischen Außenleiter

Ausgangsabbildung ist die um 90° gedrehte Abbildung H 7.9 (Bild 6.7):

$$\underline{w}_1 = -j \ln \frac{\vartheta_4 \left\{ \frac{\pi}{2K(k)} (\underline{w} + ja), \tau \right\}}{\vartheta_4 \left\{ \frac{\pi}{2K(k)} (\underline{w} - ja), \tau \right\}} + jb \quad (23)$$

Der Parallelstreifen hat in diesem Fall die Breite π . Durch die Folgeabbildung mit der Sinusfunktion

$$\underline{z} = \sin \underline{w}_1 \quad (24)$$

wird die rechte Hälfte der unteren Berandung im Punkt D um 180° nach unten geklappt. Der horizontale Streifen AGF geht über in einen Ellipsenbogen. Die Halbachsen der Ellipse ergeben sich zu:

$$a_1 = \cosh b \quad (25)$$

$$b_1 = \sinh b. \quad (26)$$

Wenn man die Breite des Parallelstreifens nicht auf π sondern auf $\pi/2$ normiert, ergibt sich das Feldbild eines Streifenleiters in einem zweifach geschlitzten, elliptischen Außenleiter.

In gleicher Weise wie in diesen 4 Beispielen lassen sich aus einfach periodischen Abbildungen (Gruppe H und J) und aus doppelt periodischen Abbildungen (Gruppe I) eine Vielzahl weiterer Abbildungen gewinnen, die nicht im Abbildungsverzeichnis enthalten sind. Dabei bleiben Elemente entlang der äußeren Berandung des Halbstreifens und auf der imaginären Achse in ihrer Form erhalten. Horizontale Geraden gehen über in Ellipsenbögen und vertikale Geraden in Hyperbelbögen.

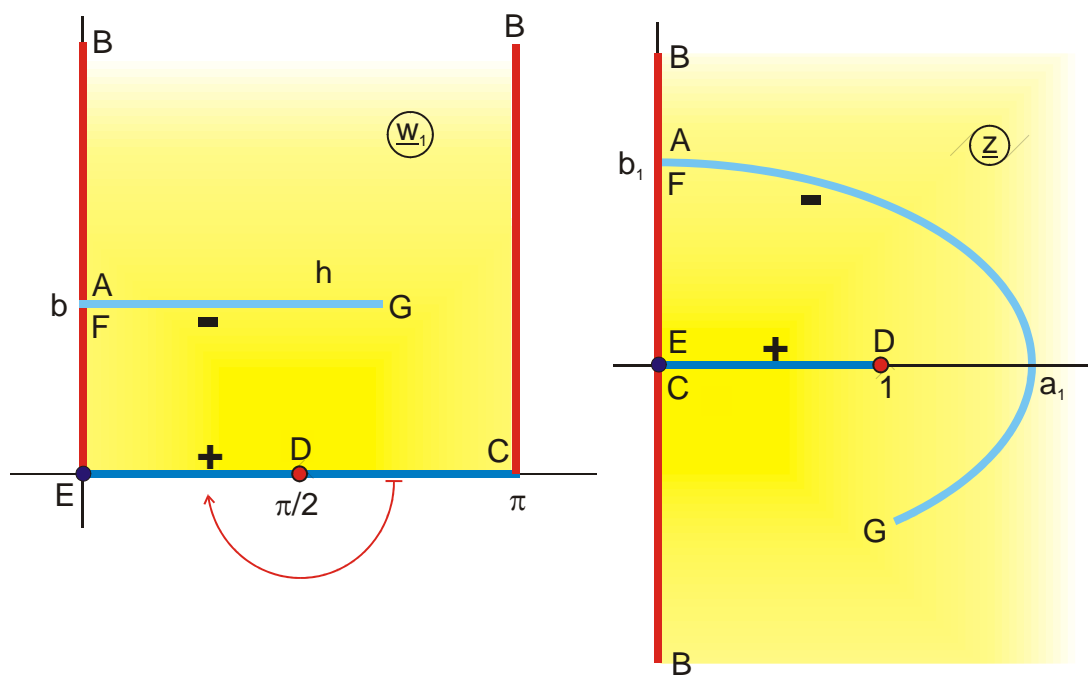


Bild 6.7: Beispiel 4, Abb. F 4.4

6.4 Logarithmus

Die Folgeabbildung $\underline{z} = \ln \underline{w}_1$ bildet die obere Halbebene auf einen Parallelstreifen der Breite π ab (Bild 6.8). Die untere Halbebene (in Bild 6.8 nicht dargestellt) wird entsprechend auf den Parallelstreifen zwischen $y = 0$ und $y = -\pi$ abgebildet. Anschaulich formuliert, wird die negativ reelle Achse im Nullpunkt um 180° hochgeklappt, bis sie parallel zur positiv reellen Achse verläuft. Der Nullpunkt wandert dabei nach links in den Punkt $-\infty$. Alle konzentrischen Kreise um den Nullpunkt werden vertikale Geraden; alle Strahlen durch den Nullpunkt werden horizontale Geraden.

Der Einheitskreis wird auf die imaginäre Achse zwischen $y = +\pi$ und $y = -\pi$ abgebildet. Das Innere des Einheitskreises geht über in die linke Hälfte des Parallelstreifens, das Äußere in die rechte Hälfte. Das Ergebnis dieser Folgeabbildung ist eine einfach periodische Abbildung.

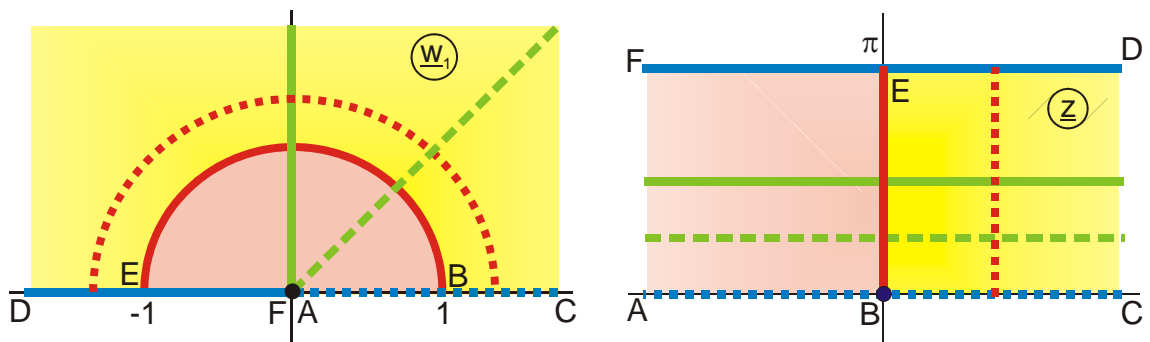


Bild 6.8: Die Abbildung $\underline{z} = \ln \underline{w}_1$

Bild 6.9 zeigt einige Beispiele. In Bild 6.9a wird die positive imaginäre Achse \overline{BC} auf den oberen Rand des Parallelstreifens bei $y = \pi/2$ abgebildet und die negative imaginäre Achse auf den unteren Rand. Der Nullpunkt wandert nach $-\infty$. In Bild 6.9b erfolgt die Randabbildung in gleicher Weise und die beiden Kreisbögen gehen über in vertikale Geraden.

Bild 6.9c ist ein Beispiel für die Abbildung des Einheitskreises auf die imaginäre Achse zwischen $+\pi$ und $-\pi$.

In Bild 6.9d ist die gleiche Einheitskreisabbildung enthalten. Der Streifenleiter auf der reellen Achse bleibt auf der reellen Achse.

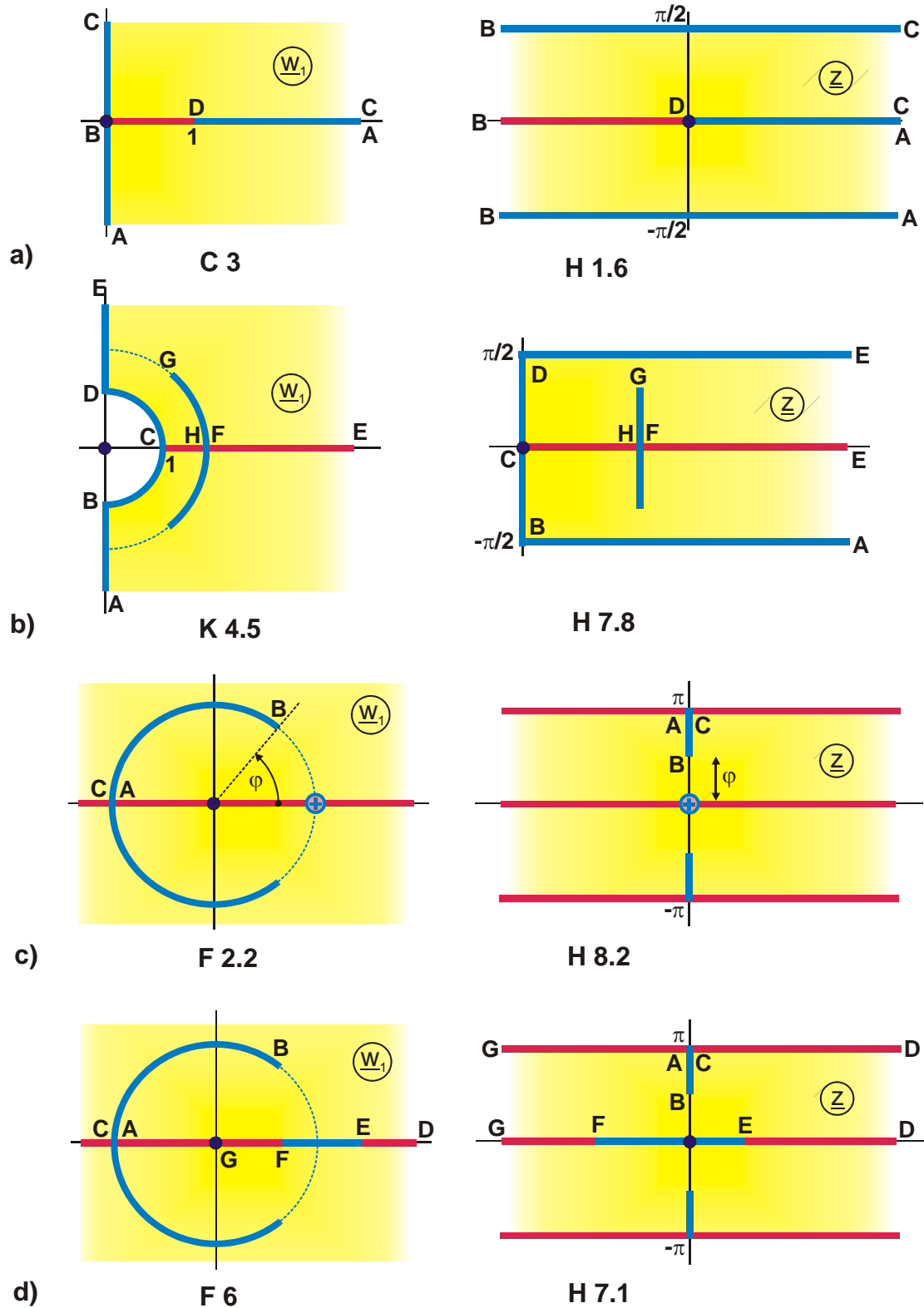


Bild 6.9: Folgeabbildungen mit $\underline{z} = \ln \underline{w}_1$

Beispiel 5: Periodisch angeordnete, gegeneinander versetzte Linienladungen

Die Menge der durch Folgeabbildung mit dem Logarithmus herstellbaren Abbildungen läßt sich erweitern, indem nicht nur von bezüglich der imaginären Achse symmetrischen, sondern auch von unsymmetrischen Feldbildern ausgegangen wird. Man kann z.B. bei der bereits bekannten Abbildung mit zwei entgegengesetzt gleichgroßen Linienladungen (Bild 6.10a), die negative Linienladung in einen beliebigen Punkt a verschieben. Die positive bleibt bei $+1$, damit sie nach der Folgeabbildung wieder im Nullpunkt der z -Ebene liegt. Um dies beides zu erreichen, wird die positive Linienladung zunächst in den Nullpunkt verschoben ($\underline{w}_1 - 1$) und der Abstand wird auf 1 normiert $(\underline{w}_1 - 1) / 2$. Dann wird der gewünschte Abstand von $(1 + a)$ durch Multiplikation mit $(1 + a)$ erzeugt und die positive Linienladung wird durch Addieren von 1 nach $+1$ verschoben. Alles zusammen ergibt:

$$\underline{w}_2 = \frac{\underline{w}_1 - 1}{2} (1 + a) + 1. \quad (27)$$

Mit der Folgeabbildung

$$\underline{z} = \ln \underline{w}_2 \quad (28)$$

ergibt sich dann die gewünschte Abbildung. Der Versatz d der negativen Linienladung ist:

$$d = \ln a. \quad (29)$$

Für den in Bild 6.10b und c gezeichneten Fall, sind die Koordinaten a und d negativ.

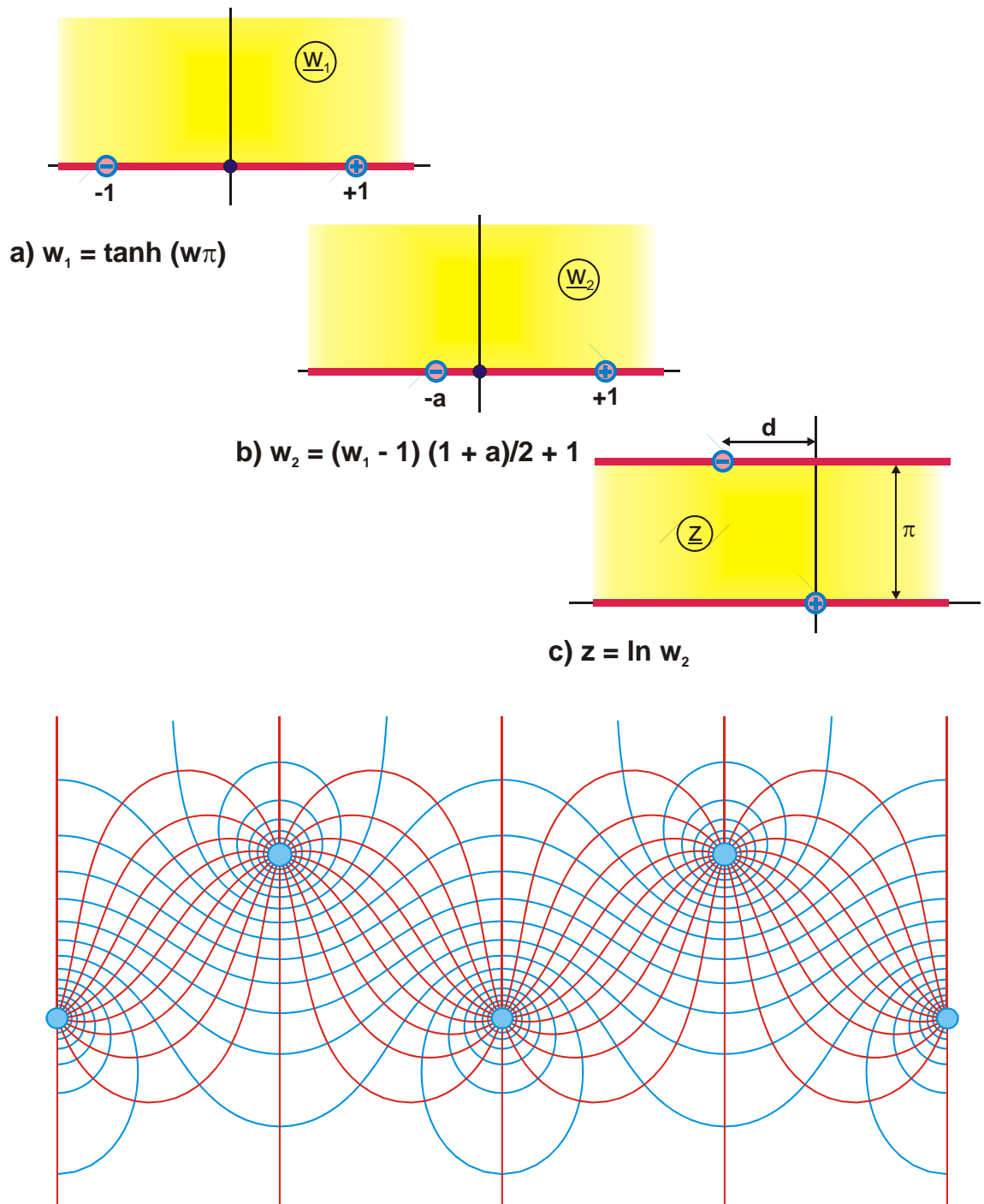


Bild 6.10: Beispiel 5, Abb. H 5

Beispiel 6: Unsymmetrische Streifenleitung

Abbildung E 5 ist das Feldbild eines Streifenleiters gegen eine, um den Winkel α aus der Horizontalen gedrehten, leitenden Ebene (Bild 6.11). Mit der Folgeabbildung

$$\underline{z} = \ln \underline{w}_1 \quad (30)$$

wird aus der Oberfläche der leitenden Ebene im IV. Quadranten (Gerade \overline{AB})

$$\underline{w}_1 = r \cdot e^{-j\alpha} \quad (31)$$

eine um $-j\alpha$ verschobene, horizontale Gerade

$$\underline{z} = \ln r - j\alpha \quad (32)$$

und aus der Oberfläche der leitenden Ebene im II. Quadranten (Gerade \overline{AC})

$$\underline{w}_1 = r \cdot e^{j(\pi-\alpha)} \quad (33)$$

eine um $j(\pi - \alpha)$ verschobene, horizontale Gerade

$$\underline{z} = \ln r + j(\pi - \alpha). \quad (34)$$

Die Breite s des Streifenleiters ergibt sich zu

$$s = \ln h = -\ln(1/h). \quad (35)$$

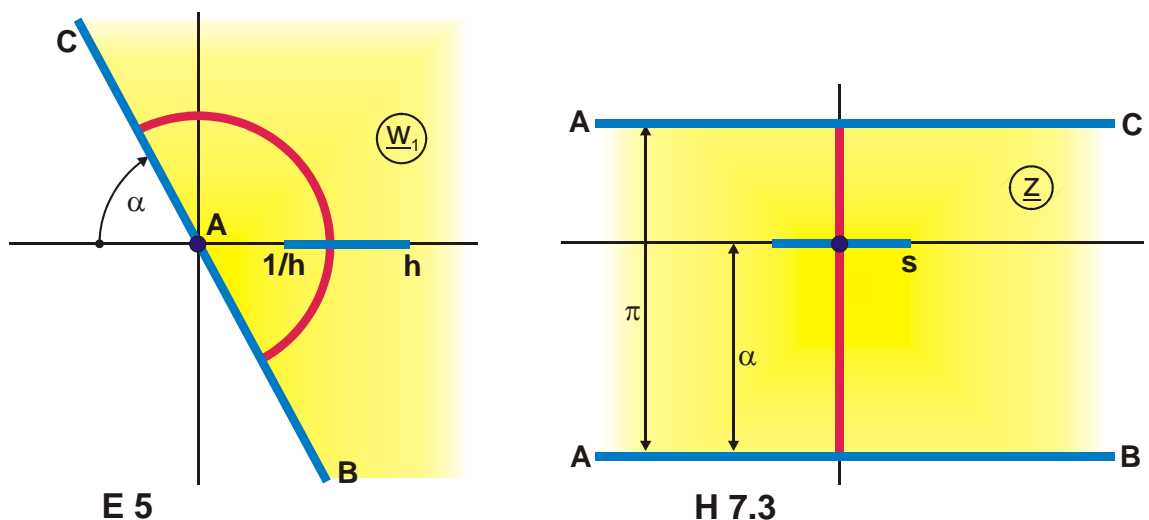


Bild 6.11: Beispiel 6, Abb. H 7.3

6.5 Exponentialfunktion

Die Abbildungseigenschaften der Exponentialfunktion lassen sich unmittelbar aus dem vorangegangenen Kapitel entnehmen, da sie die Umkehrfunktion des Logarithmus ist. In den Bildern 6.8 und 6.9 ist also nur die Abbildungsreihenfolge zu vertauschen. Die Exponentialfunktion bildet jeweils die rechte Seite auf die linke Seite ab.

Weitere Beispiele sind in Bild 6.12 zusammengestellt. Bild 6.12a und b zeigen, wie horizontale Geraden in Strahlen durch den Nullpunkt abgebildet werden. Durch die Exponentialfunktion wird jeweils die obere Berandung wie eine Buchseite um 180° nach links aufgeklappt und gleichzeitig wandert der Punkt $-\infty$ in den Nullpunkt der z -Ebene. Die Bilder 6.10c, d und e zeigen Beispiele, wie vertikale Geraden in Kreisbögen umgewandelt werden. Geradenstücke auf der imaginären Achse gehen jeweils in Teile des Einheitskreises über.

Alle dargestellten Beispiele lassen sich variieren, indem der Parallelstreifen der Ausgangsabbildung nicht auf die Breite π sondern auf die Breite α normiert wird. In der z -Ebene ergibt sich dann ebenfalls der Winkel α . Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, daß (bei festgehaltener positiv reeller Achse) die negativ reelle Achse und mit ihr alle anderen Berandungen, um den Nullpunkt gedreht werden können, und zwar nach oben und nach unten, je nachdem, ob $\alpha > \pi$ oder $\alpha < \pi$ gewählt wird.

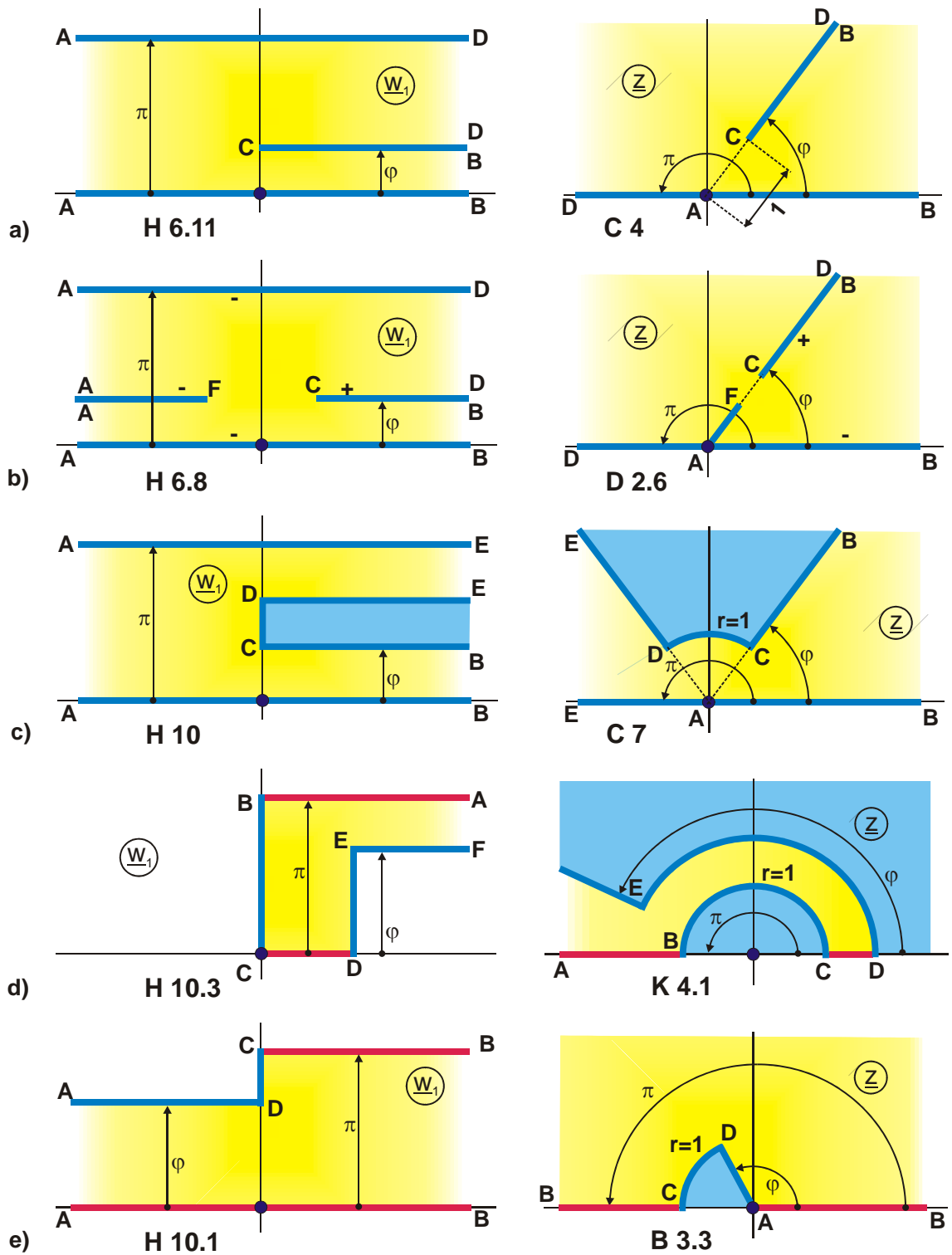


Bild 6.12: Folgeabbildungen mit der Exponentialfunktion,

$$\underline{z} = \exp \underline{w}_1$$

Beispiel 7: Linienladungen zwischen zwei konzentrischen Metallzylindern

Eine Folgeabbildung mit der Exponentialfunktion ist nicht nur bei einfach periodischen Funktionen möglich, sondern auch bei doppelt periodischen Funktionen. Als Beispiel dafür wird vom Feldbild einer Linienladung in einem Rechteck ausgegangen (Bild 6.13). Dazu wird die Ausgangsabbildung I 1.1

$$\underline{w}_1 = F_a \left(a + jb \cdot \tanh(\underline{w} \pi), k \right) \quad (36)$$

zunächst so umnormiert, daß das Rechteck im II. Quadranten liegt und die Höhe φ hat

$$\underline{w}_2 = \varphi \cdot \left(\frac{\underline{w}_1}{K'(k)} - \frac{K(k)}{K'(k)} \right) = \varphi \left(\frac{\underline{w}_1}{K'(k)} - \frac{1}{\tau} \right). \quad (37)$$

Damit wird erreicht, daß die Gerade \overline{DC} nach der Folgeabbildung

$$\underline{z} = \exp(\underline{w}_2) \quad (38)$$

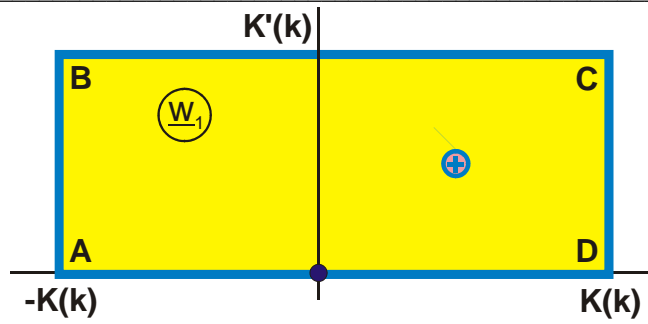
auf dem Einheitskreis liegt und daß der Kreisbogen dann den Öffnungswinkel φ hat. Dies folgt unmittelbar aus Gl. (38) durch Einsetzen von $\underline{w}_2 = j\varphi$. Das gesamte Rechteck wird auf ein Kreisringsegment abgebildet. Der Radius des inneren Kreises r ergibt sich durch Einsetzen von Punkt A zu

$$r = \exp\left(-\frac{\varphi}{2\tau}\right). \quad (39)$$

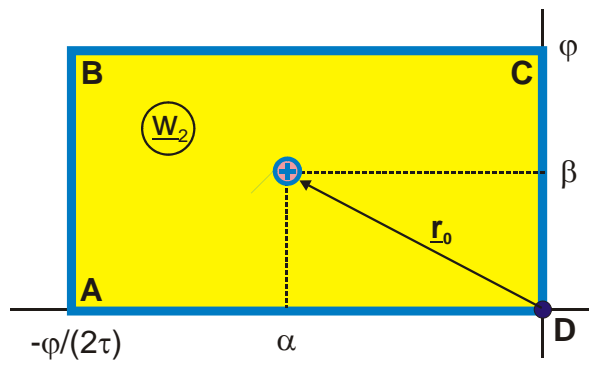
Die Linienladung, die in der w_2 -Ebene bei $\underline{r}_0 = \alpha + j\beta$ liegt, wird abgebildet auf

$$\underline{r}_1 = \exp(\underline{r}_0) = e^\alpha \cdot e^{j\beta}. \quad (40)$$

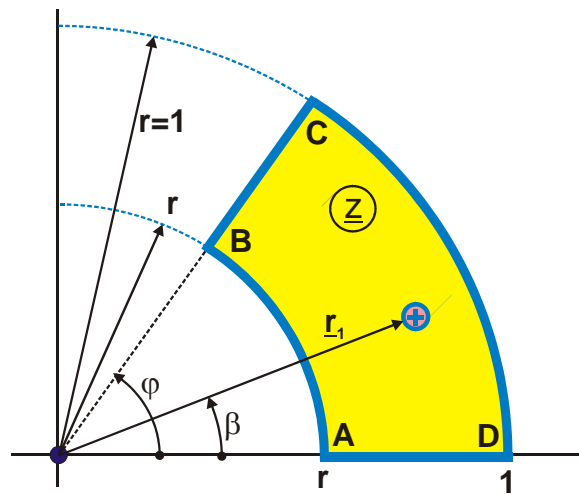
a)



b)



c)



d)

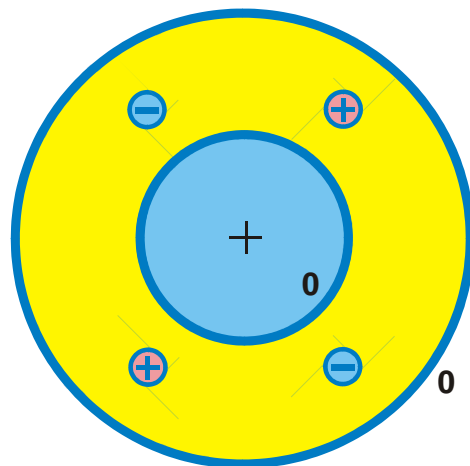


Bild 6.13: Beispiel 7, Abb. G 7

Durch Variieren von a und b läßt sie sich beliebig innerhalb des Kreisringsegments positionieren. Die dazugehörigen Gleichungen sind bei Abb. G 7 zusammengestellt. Wählt man $\varphi = \pi/2$, dann ergibt sich, zu einer radialsymmetrischen Anordnung ergänzt, das Feldbild von 4 ungleichnamigen, gleichgroßen Linienladungen zwischen zwei geerdeten, konzentrischen Kreiszylindern (Bild 6.13d). Weitere Beispiele für diese Art der Folgeabbildung sind die Abbildungen G 7.1 bis G 7.3.

6.6 Die Funktion $\underline{z} = 1/\underline{w}_1$

Wenn man mit $\underline{z} = 1/\underline{w}_1$ eine gegebene Abbildung invertiert, gehen wegen

$$\frac{1}{r \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-j\varphi} \quad (41)$$

alle Punkte außerhalb des Einheitskreises in Punkte innerhalb des Einheitskreises über. Die obere Halbebene wird dabei auf die untere abgebildet und umgekehrt. Nur die Punkte $+1$ und -1 bleiben erhalten. Wie Bild 6.14 zeigt, werden Strahlen durch den Nullpunkt wieder auf Strahlen durch den Nullpunkt abgebildet. Horizontale und vertikale Geraden gehen über in aufeinander senkrecht stehende Kreise durch den Nullpunkt. Allgemein gehen Kreisbögen in beliebiger Lage in der w_1 -Ebene über in Kreisbögen in der z -Ebene. Der Punkt ∞ wird in den Nullpunkt abgebildet.

Bild 6.15 zeigt die Auswirkungen der Inversion auf verschiedene Abbildungen. In Bild 6.15a bleiben die beiden Leiterstreifen auf der reellen Achse erhalten, und die negative Ladung im Unendlichen wird in den Nullpunkt abgebildet. Bild 6.15b zeigt den umgekehrten Effekt. Ein Strahl von ∞ bis B geht über in einen Strahl von B bis zum Nullpunkt. Grundsätzlich gilt für alle Beispiele, daß die Abbildungsreihenfolge auch umgekehrt werden kann. Da die Umkehrfunktion der Inversion ebenfalls die Inversion ist, ergeben sich alle Abbildungen auf der linken Seite durch Inversion der Abbildung auf der

rechten Seite. Bild 6.15c zeigt, daß eine achsenparallele Gerade \overline{BA} in einen Halbkreis übergeht und Bild 6.15d ist ein Beispiel für die Spiegelung einer Abbildung am Einheitskreis. Bild 6.15e zeigt, daß zwei im gleichen Punkt beginnende Halbgeraden in ein Kreisbogenzweieck übergehen. Ihr Schnittwinkel φ bleibt dabei erhalten. Da sich die Halbgeraden im Punkt ∞ ebenfalls unter dem Winkel φ treffen, wird das Kreisbogenzweieck symmetrisch.

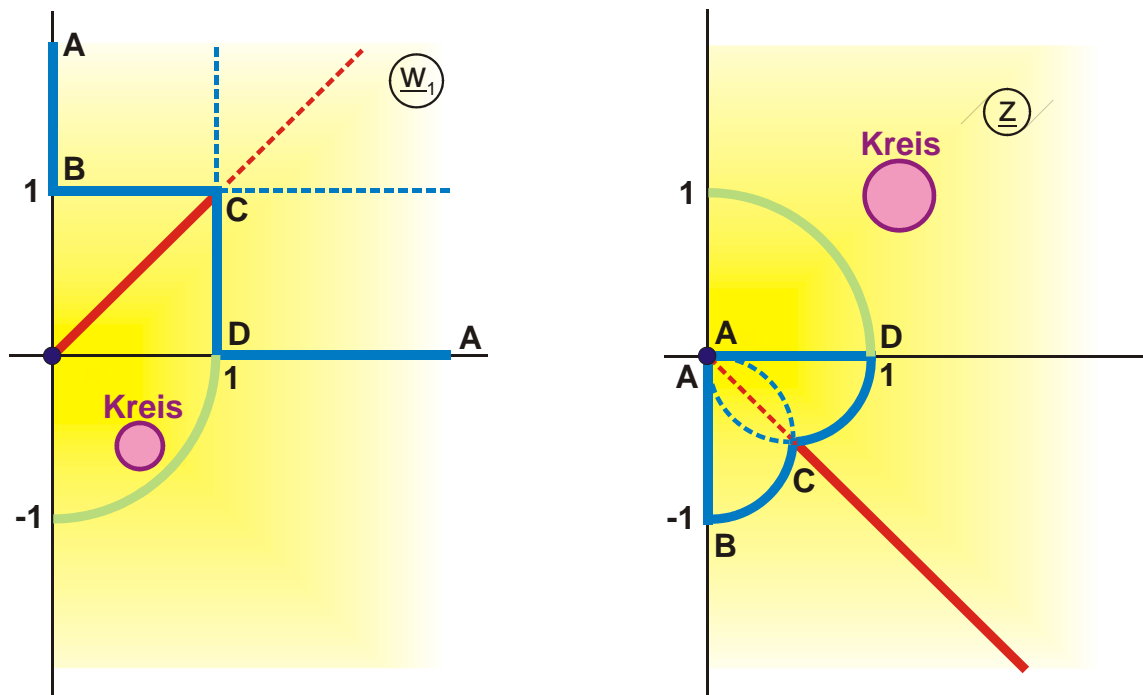
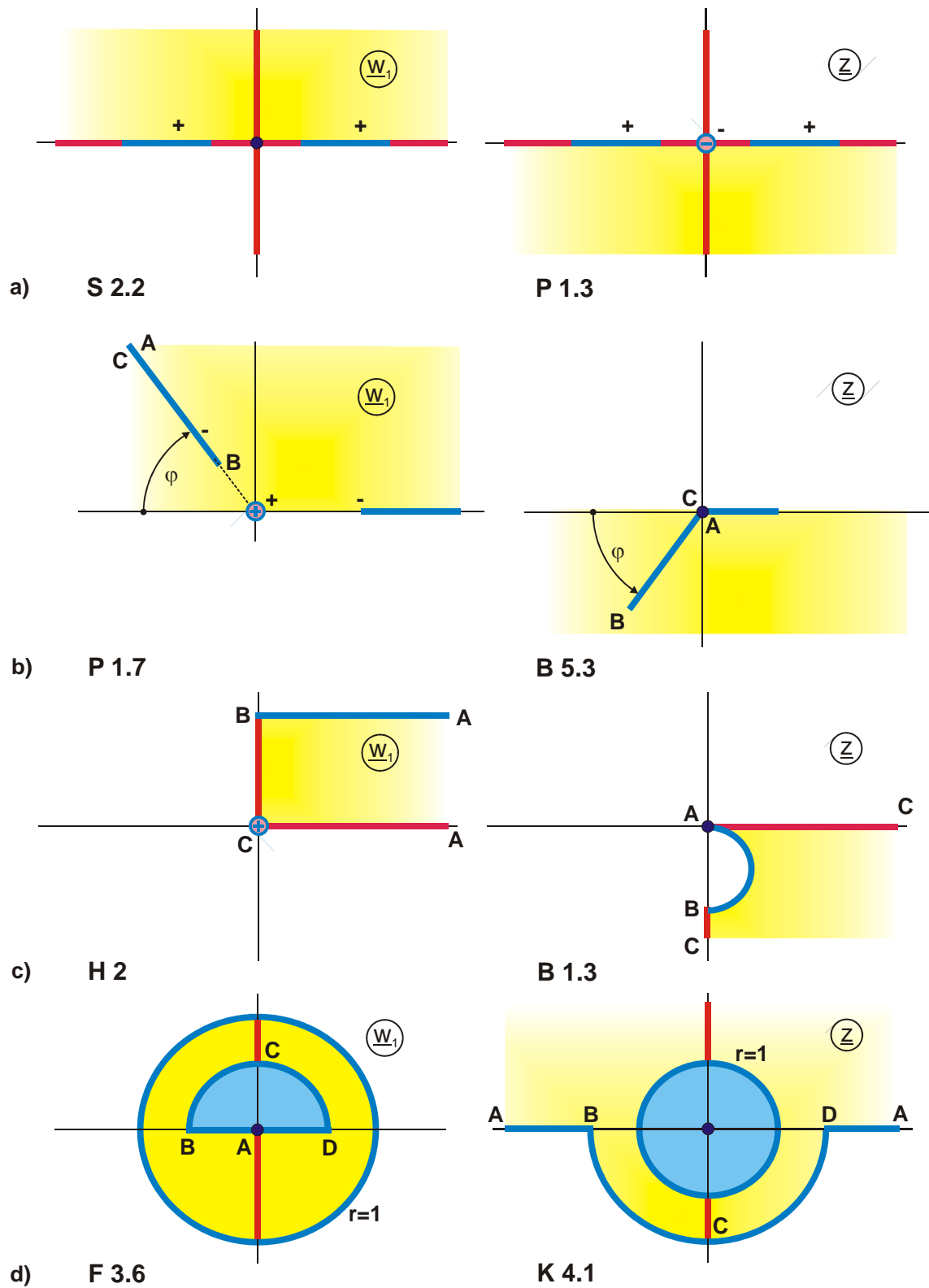


Bild 6.14: Die Abbildung $\underline{z} = 1/\underline{w}_1$

Bild 6.15: Folgeabbildungen mit $\underline{z} = 1/\underline{w}_1$

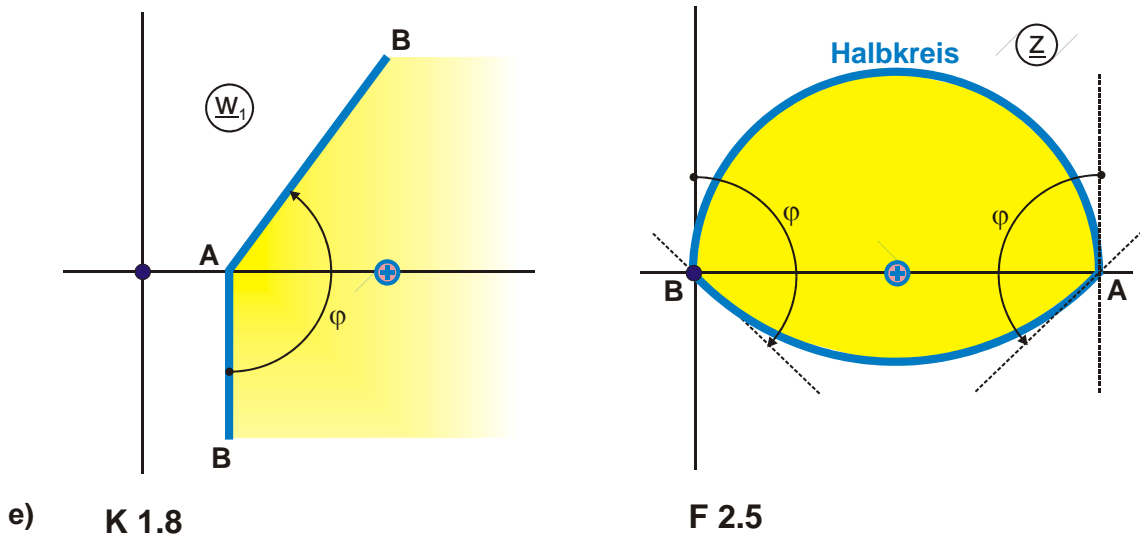


Bild 6.15: Folgeabbildungen mit $\underline{z} = 1/\underline{w}_1$

Beispiel 8: Feldbild Streifenleiter gegen Kreiszylinder (I)

Da eine vertikale Gerade, die nicht mit den Koordinatenachsen zusammenfällt, nach Bild 6.14 in einen Kreis übergeht, wird als Ausgangsabbildung das Feldbild eines Streifens gegen eine leitende Ebene benutzt (Abb. E 3)

$$\underline{w}_1 = \operatorname{sn}(\underline{w}, k). \quad (42)$$

Diese Abbildung wird mit a multipliziert, um einen weiteren Parameter zu erhalten und die leitende Ebene wird um 1 aus dem Nullpunkt verschoben

$$\underline{w}_2 = 1 + a \cdot \underline{w}_1. \quad (43)$$

Nach der Folgeabbildung

$$\underline{w}_3 = 1/\underline{w}_2 \quad (44)$$

geht die leitende Ebene über in einen Kreis durch 1 und 0; der Streifen bleibt als solcher erhalten. Er ändert nur seine Länge.

Damit ist das gesetzte Ziel erreicht. Aus Gründen der Vereinheitlichung der Feldbilder im Abbildungsverzeichnis wird der Kreismittelpunkt in den Nullpunkt verschoben und der Radius gleich 1 gesetzt

$$\underline{z} = \left(\underline{w}_3 - \frac{1}{2} \right) \cdot 2. \quad (45)$$

Die Endpunkte des Streifens ergeben sich damit zu (Bild 6.16d):

$$-b = \left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{2} \right) 2 = \frac{1+a}{1-a} \quad (46)$$

$$-c = \left(\frac{1}{1-a/k} - \frac{1}{2} \right) 2 = \frac{1+a/k}{1-a/k}. \quad (47)$$

Die Gleichungen (43) bis (45) lassen sich zusammenfassen zu

$$\left(\frac{1}{1+a\underline{w}_1} - \frac{1}{2} \right) 2 = \frac{1-a\underline{w}_1}{1+a\underline{w}_1}. \quad (48)$$

Anstelle der 3 Einzelschritte in Abb. 6.16 kann man also auch unmittelbar eine Folgeabbildung mit diesem Spezialfall der bilinearen Transformation durchführen. Gleichung (48) bildet die imaginäre Achse auf den Einheitskreis ab. Die linke Halbebene geht über in das Äußere und die rechte Halbebene in das Innere des Einheitskreises.

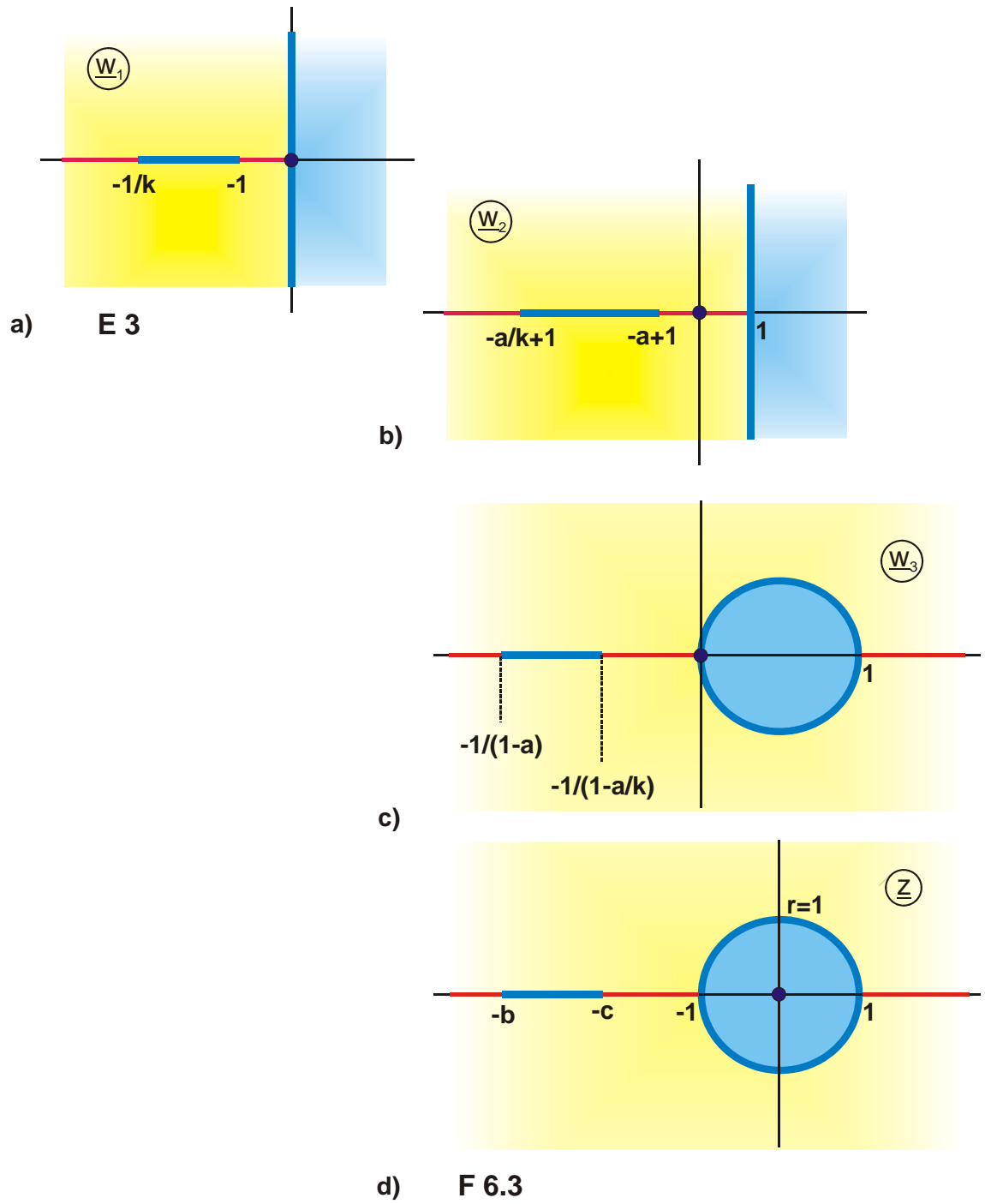


Bild 6.16: Beispiel 8, Abb. F 6.3

Beispiel 9: Feldbild Streifenleiter gegen Kreiszyylinder (II)

Für den Fall, daß der Streifenleiter um 90° gedreht ist (Bild 17d), geht man zweckmäßigerweise von Abb. F 3.1 aus.

$$\underline{w}_1 = r \cdot \frac{\mathfrak{G}_4 \left\{ \frac{\pi}{2K(k)} (\underline{w} + j a), \tau \right\}}{\mathfrak{G}_4 \left\{ \frac{\pi}{2K(k)} (\underline{w} - j a), \tau \right\}}. \quad (49)$$

Das Feldbild wird um r aus dem Nullpunkt verschoben

$$\underline{w}_2 = r + \underline{w}_1, \quad (50)$$

damit der innere Kreisbogen auf einem Kreis durch den Nullpunkt liegt. Mit der Folgeabbildung

$$\underline{w}_3 = 1/\underline{w}_2, \quad (51)$$

ergibt sich daraus eine vertikale Gerade, der gesuchte Streifenleiter. Der äußere Kreiszyylinder bleibt ein Kreiszyylinder (Kreise werden wieder auf Kreise abgebildet). Zur Vereinheitlichung wird wieder der Kreisradius auf 1 normiert und der Mittelpunkt in den Nullpunkt verschoben.

$$\underline{z} = r + \underline{w}_3 / \rho. \quad (52)$$

Bei der Folgeabbildung $\underline{z} = 1/\underline{w}_1$ werden zwar Kreise auf Kreise abgebildet, aber konzentrische Kreise bleiben nicht konzentrisch. Der gemeinsame Mittelpunkt $\underline{w}_2 = r$ der beiden Kreiszyylinder in Bild 17b bleibt also nicht erhalten. Der neue Mittelpunkt M des äußeren Kreises muß aus der Geometrie von Bild 17c berechnet werden:

$$\rho = \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1-r} \right) / 2 = \frac{1}{1-r^2} \quad (53)$$

$$M = \frac{1}{r-1} + \rho = -\frac{r}{1-r^2} = -\rho \cdot r. \quad (54)$$

Die Höhe b des Streifens ergibt sich aus

$$\underline{r}_1 = \frac{1}{r + r \cdot \exp(-j\varphi)} \quad (55)$$

$$b = \frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \underline{r}_1. \quad (56)$$

Die Mittelpunktentfernung s wird mit Gl. (52):

$$s = r + \frac{1}{2r\rho}. \quad (57)$$

Abb. F 6.6 ist eine Variante dieser Abbildung. Wie man anhand von Bild 6.17 leicht nachvollziehen kann, bewirkt eine Multiplikation der Ausgangsabbildung in Bild 6.17a mit $\exp(j\beta)$ ein Verschieben des Leiterstreifens in Abb. 6.17d in vertikaler Richtung. Für positive Winkel β wird die Kreisbogenelektrode im mathematisch positiven Sinn gedreht. Der Streifenleiter verschiebt sich bei gleichbleibendem Abstand s und unveränderter Lage des Kreiszyinders nach unten. Die Elektrodengeometrie ist damit nicht mehr symmetrisch zur reellen Achse.

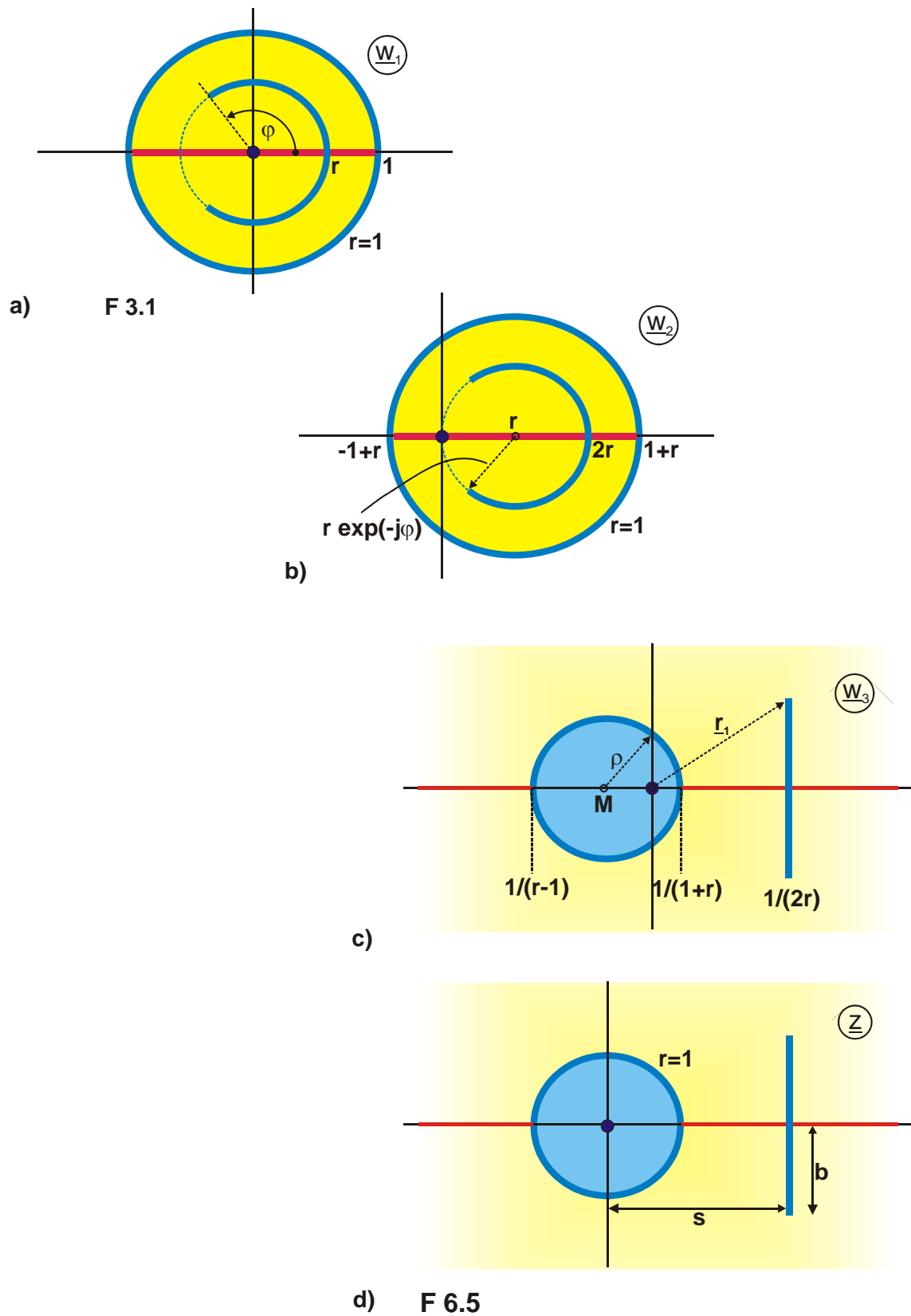


Bild 6.17: Beispiel 9, Abb. F 6.5

6.7 Abbildung von Gebieten

In den vorangegangenen Kapiteln wurde gezeigt, wie sich eine gegebene Abbildung durch eine Folgeabbildung mit einer elementaren Funktion gezielt in eine andere Abbildung umwandeln läßt. Um eine gegebene Abbildungsaufgabe zu lösen, lassen sich selbstverständlich auch kompliziertere Funktionen einsetzen sowie mehrere Folgeabbildungen hintereinander durchführen. Eine weitere, zielgerichtete Vorgehensweise ist dabei, ein vollständiges Gebiet in einer gegebenen Abbildung in ein anders geformtes Gebiet umzuwandeln. Zu diesem Zweck enthält Kapitel 6.8 ein Verzeichnis häufig gebrauchter Gebietsabbildungen. Die Vorgehensweise wird an einigen Beispielen erläutert.

Beispiel 10: Vertikaler Streifen gegen horizontalen Streifen

Um das Feldbild eines vertikalen Streifens gegen einen horizontalen Streifen zu erhalten (Bild 6.10c), bei dem alle Abmessungen beliebig wählbar sind, wird von Abb. E 3 ausgegangen

$$\underline{w}_1 = \operatorname{sn}(\underline{w}, k) . \quad (58)$$

Mit der Umformung

$$\underline{w}_2 = j \cdot a \cdot \underline{w}_1 \quad (59)$$

ergibt sich daraus das Feldbild eines vertikalen Streifens gegen eine leitende Ebene. Als weitere Folgeabbildung wird dann mit Gebietsabbildung X 6 die obere Halbebene auf das Äußere eines Streifenleiters abgebildet

$$\underline{z} = -2 \frac{\underline{w}_2}{1 + \underline{w}_2^2} . \quad (60)$$

Da bei dieser Abbildung die imaginäre Achse wieder auf die imaginäre Achse abgebildet wird, bleibt der vertikale Streifen erhalten. Die leitende Ebene (die reelle Achse) wird zu einem horizontalen Streifen zusammengeklappt.

Die Koordinaten des vertikalen Streifens ergeben sich durch Einsetzen der Punkte E und D in Gl. (60). Punkt E wird von $\underline{w}_2 = j a$ abgebildet nach $j h = -2 j a / (1 - a^2)$:

$$h = \frac{2 a}{a^2 - 1}. \quad (61)$$

Punkt D wird von $\underline{w}_2 = j a / k$ abgebildet nach $\underline{z} = j d$ mit

$$d = \frac{2 a k}{a^2 - k^2}. \quad (62)$$

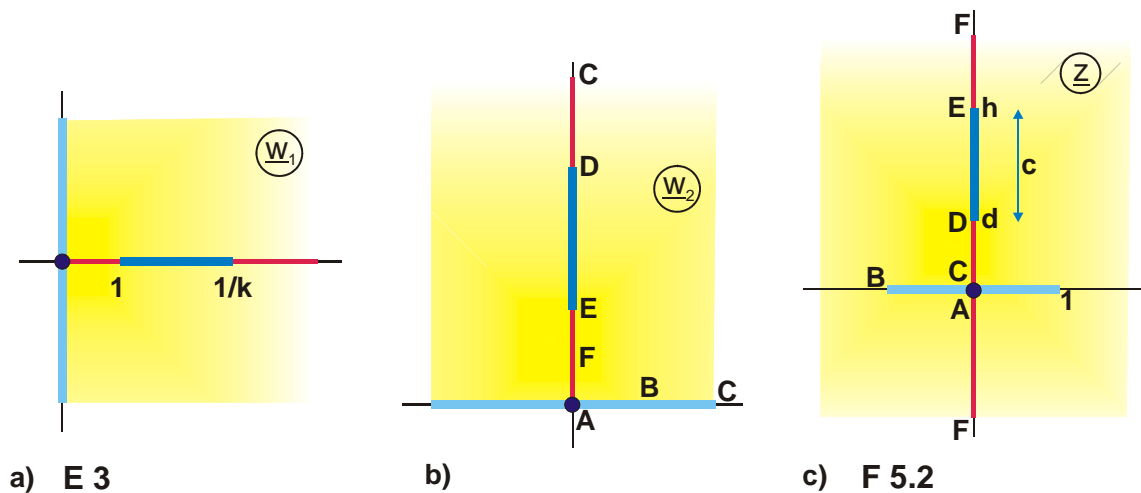


Bild 6.18: Beispiel 10, Abb. F 5.2

Beispiel 11: Streifen gegen Rechteckzylinder

Mit der Gebietsabbildung X 12 läßt sich ein Streifen auf der reellen Achse zwischen -1 und $+1$ in ein Rechteck umwandeln. Damit ergibt sich das gesuchte Feldbild aus dem Ergebnis des vorangegangenen Beispiels 10

$$\underline{w}_1 = -2 \frac{j a \operatorname{sn}(\underline{w}, k)}{1 - a^2 \operatorname{sn}^2(\underline{w}, k)} \quad (63)$$

durch die Folgeabbildung

$$\underline{z} = B_a \left(\frac{\underline{w}_1}{k_1}, k_1 \right) + j b_1 . \quad (64)$$

Die Seiten a_1 und b_1 ergeben sich aus der Wahl des Moduls k_1

$$a_1 = \frac{E(k_1) - k_1'^2 K(k_1)}{k_1^2} \quad (65)$$

$$b_1 = \frac{E'(k_1)}{k_1^2} - K'(k_1) . \quad (66)$$

Der vertikale Streifen bleibt auf der imaginären Achse. Seine neuen Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen der entsprechenden Punkte zu

$$h_1 = \operatorname{Im} B_a \left(j \frac{h}{k_1}, k_1 \right) + b_1 \quad (67)$$

$$d_1 = \operatorname{Im} B_a \left(j \frac{d}{k_1}, k_1 \right) + b_1 . \quad (68)$$

So wie in den Beispielen 10 und 11 läßt sich durch eine Gebietsabbildung als Folgeabbildung ein bestimmtes Gebiet in einem vorgegebenen Feldbild in ein anders geformtes Gebiet umwandeln. Es ist also problemlos möglich, Streifen in Kreise oder Ellipsen und umgekehrt Kreise oder Ellipsen in Streifen umzuwandeln. Dabei ist jedoch stets zu berücksichtigen, daß das restliche Feldbild ebenfalls verzerrt wird. Wenn die Elektroden

außerhalb des abgebildeten Gebiets nicht auf Symmetrieebenen liegen, ergeben sich nur in Sonderfällen mathematisch exakt beschreibbare neue Elektrodenanordnungen. Ein solcher Sonderfall ist im nächsten Beispiel beschrieben.

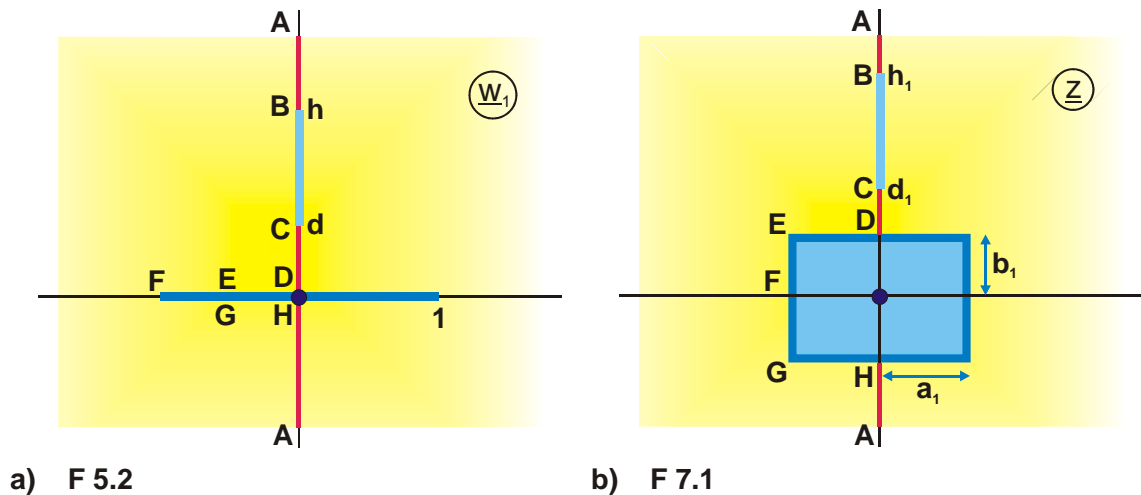


Bild 6.19: Beispiel 11, Abb. F 7.1

Beispiel 12: Streifen und Kreisbogen

Die im Beispiel 10 benutzte Gebietsabbildung X 6

$$\underline{z} = -2 \frac{\underline{w}_1}{1 + \underline{w}_1^2} \quad (69)$$

faltet nicht nur die reelle Achse zu einem Streifen zusammen, sondern bildet zugleich die obere Hälfte des Einheitskreises auf die reelle Achse für $|x| \geq 1$ ab.

Geht man also von einem Feldbild entsprechend Bild 6.20a aus, bei dem der schräg stehende Streifen am Einheitskreis gespiegelt wird, so wird nach der Gebietsabbildung mit Gl. (69) aus diesem Streifen ein Kreisbogen und aus dem Einheitskreis ein Teil der reel-

len Achse. Die Spiegelung am Einheitskreis geht über in die Spiegelung an der reellen Achse. Punkt B ist damit in der z -Ebene konjugiert komplex zu Punkt A (Bild 6.20b).

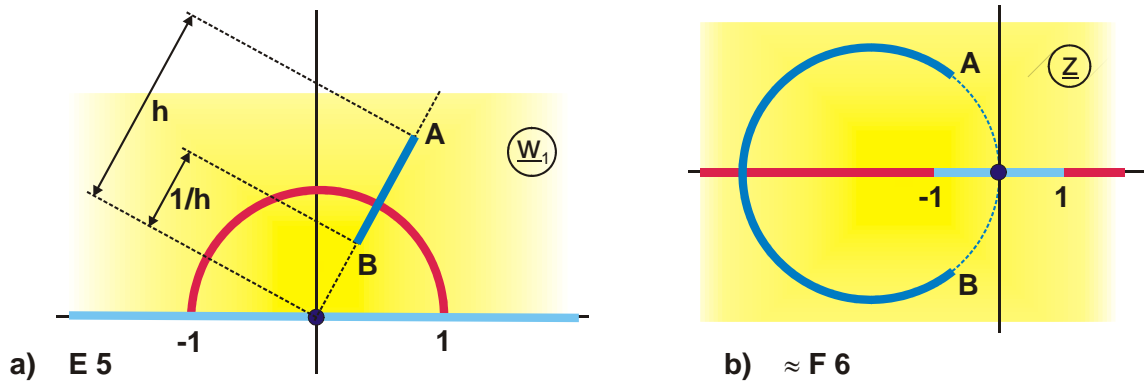


Bild 6.20: Beispiel 12, Abb. F 6

Kapitel 6.8. enthält nur einige typische und häufig eingesetzte Gebietsabbildungen. Bezüglich der Abbildung

- der oberen Halbebene,
- eines Parallelstreifens,
- eines Halbstreifens oder
- eines Rechtecks

auf ein anderes Gebiet können alle anderen geeigneten Abbildungen des Abbildungsverzeichnisses benutzt werden.

Soll ein komplizierteres Gebiet I auf ein anderes Gebiet II abgebildet werden, dann ist eine mögliche Vorgehensweise die Folgende:

1. Die Abbildungsfunktionen f_I und f_{II} der Gebiete I und II als Ergebnisabbildung werden dem Abbildungsverzeichnis entnommen.
2. Von der Abbildungsfunktion f_I wird die Umkehrfunktion f_I^{-1} gebildet.
3. Die Funktion f_I^{-1} wird als Vorabbildung der Funktion f_{II} vorangestellt.

Beispiel 13: 2 Kreise auf 2 Streifen

Als Beispiel für diese Vorgehensweise soll das Gebiet außerhalb zweier gleich großer Kreise auf das Gebiet außerhalb zweier koplanarer Streifen abgebildet werden. Funktion f_I ergibt sich mit Abb. E 1.1 zu

$$f_I : \quad \underline{w}_1 = \frac{1}{r_1} \tanh(\underline{w}_2 \pi) \quad (70)$$

mit

$$r_1 = \frac{1}{\sinh(2\pi u_c)} \quad (71)$$

und

$$u_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{ar sinh} \sqrt{d^2 - 1} . \quad (72)$$

Diese Funktion bildet entsprechend Bild 6.21 das Innere eines Rechtecks auf das Gebiet zwischen zwei gleich großen Kreisen ab.

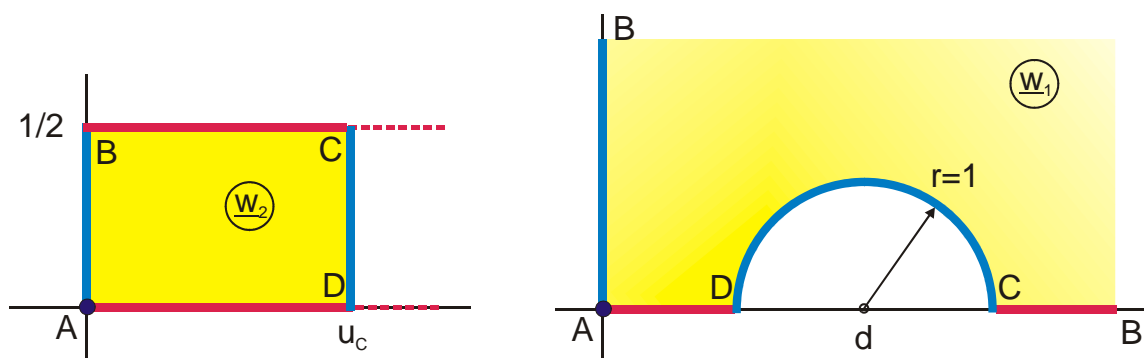


Bild 6.21: Funktion f_I von Beispiel 13, dargestellt ist der I. Quadrant der Abbildung

Die Funktion f_{II} ergibt sich mit Abb. E 3 zu

$$f_{II} : \quad \underline{z} = \operatorname{sn}(\underline{w}_3, k) \quad (73)$$

und bildet das Innere eines Rechtecks auf das Gebiet außerhalb zweier koplanarer Streifen ab (Bild 6.22).

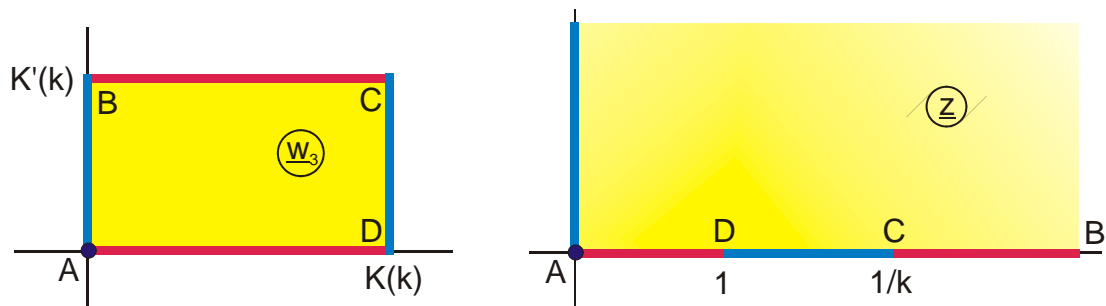


Bild 6.22: Funktion f_{II} von Beispiel 13

In Bild 6.23 ist das Endergebnis als Folge von drei Abbildungen dargestellt. Die Umkehrfunktion von f_I

$$f_I^{-1} : \quad \underline{w}_2 = \frac{1}{\pi} \arctanh(r_1 \cdot \underline{w}_1) \quad (74)$$

bildet das Außengebiet zweier Kreise auf das Innere eines Rechtecks ab. Mit der Zwischenabbildung

$$\underline{w}_3 = \frac{\underline{w}_2}{u_c} \cdot K(k) \quad (75)$$

mit

$$\tau = \frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{1}{2u_c} \quad (76)$$

und

$$k = \left[\vartheta_2(0, \tau) / \vartheta_3(0, \tau) \right]^2 \quad (77)$$

wird dieses Rechteck so umnormiert, daß es die gleiche Größe hat wie dasjenige, das zur Funktion f_{II} gehört. Die gesamte Abbildung, von Ebene w_1 nach Ebene z ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (73) bis (75) ineinander:

$$\underline{z} = \operatorname{sn} \left[\frac{K(k)}{u_c \cdot \pi} \cdot \operatorname{ar} \tanh (r_1 \cdot \underline{w}_1), k \right]. \quad (78)$$

Diese Funktion bildet zwei gleich große Kreise auf zwei gleich große Streifen ab. Die Umkehrfunktion, die sich unmittelbar anschreiben läßt, bildet dementsprechend zwei Streifen auf zwei Kreise ab.

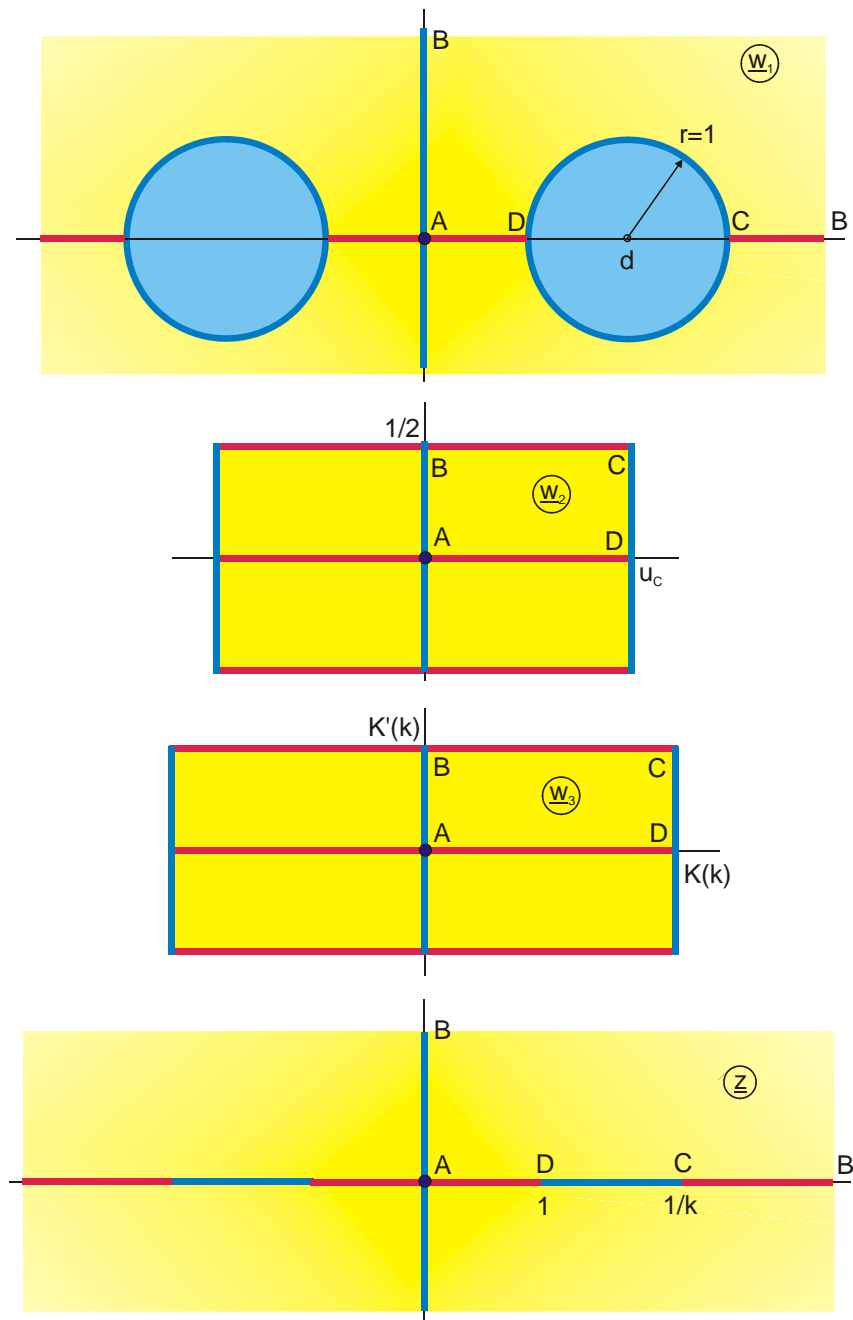
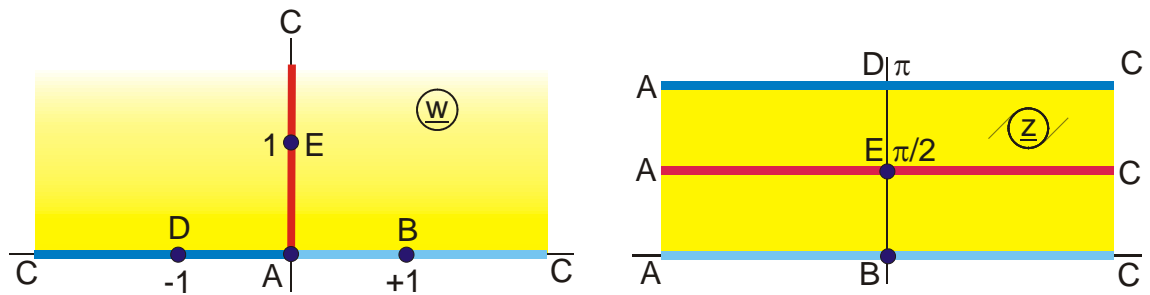


Bild 6.23: Vollständige Abbildungsfolge für Beispiel 13

6.8 Verzeichnis einiger Gebietsabbildungen

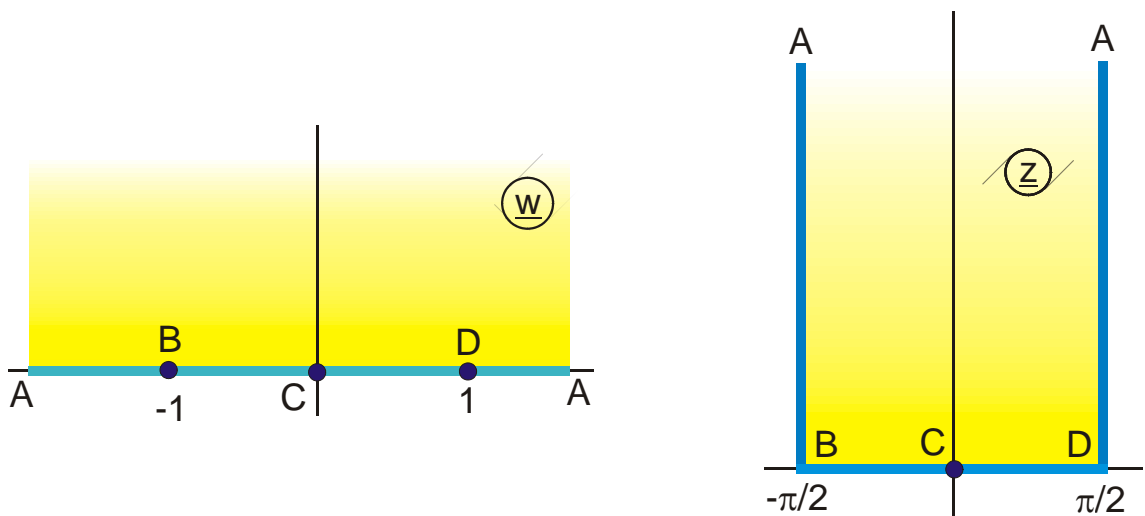
1. Obere Halbebene auf Parallelstreifen

$$z = \ln w_1$$



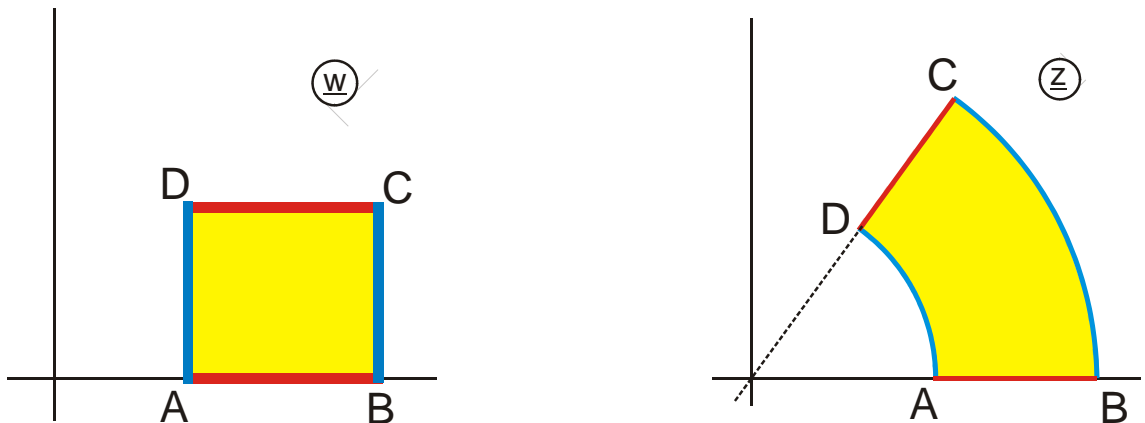
2. Obere Halbebene auf Halbstreifen

$$z = \arcsin w_1$$



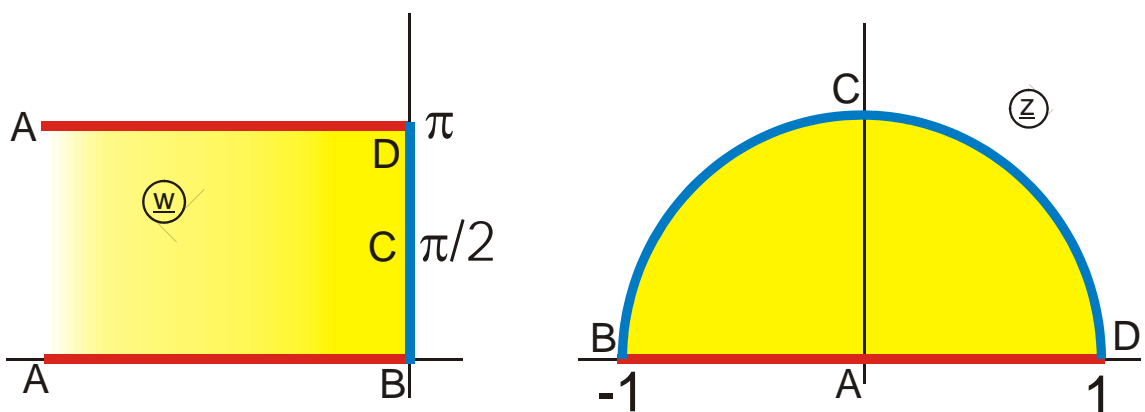
3. Rechteckinneres auf Kreisringsektorinneres

$$z = \exp w$$



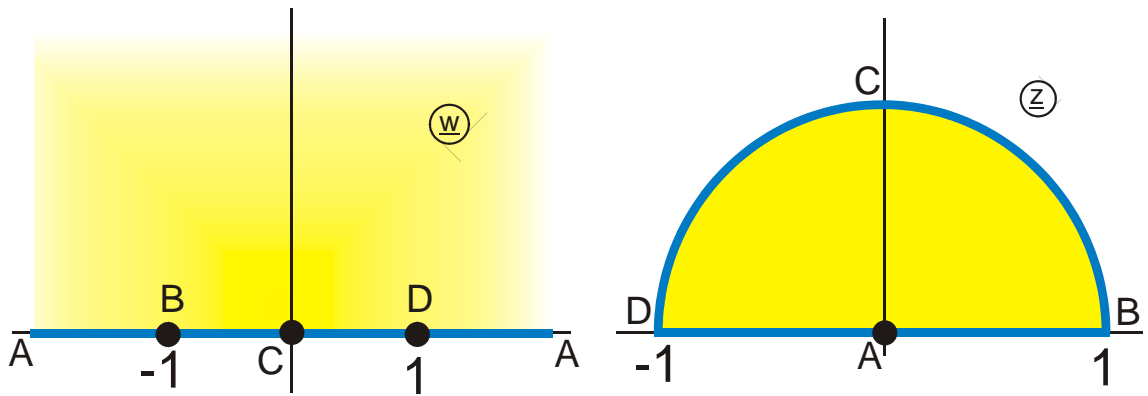
4. Halbstreifen auf Halbkreisinneres

$$z = \exp w$$



5. Obere Halbebene auf Halbkreisinneres

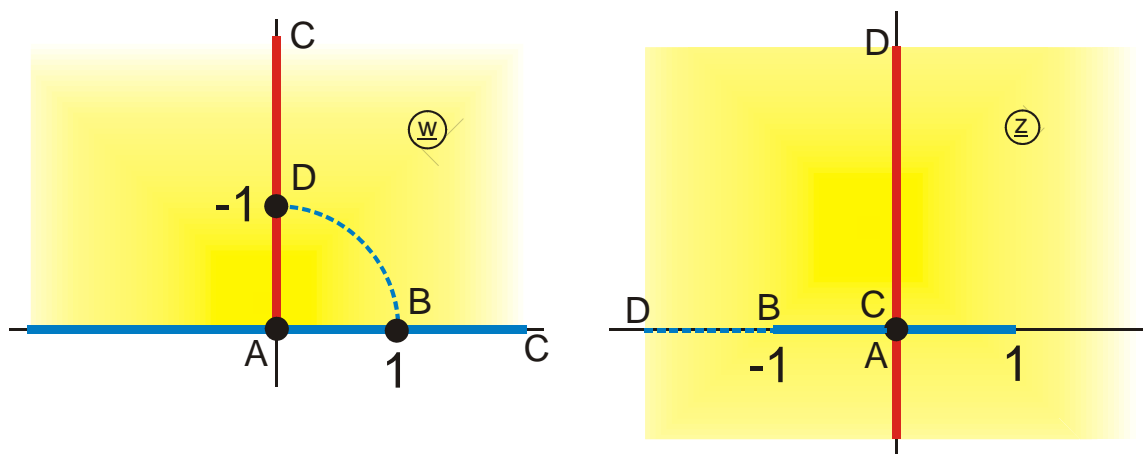
$$z = \sqrt{w^2 - 1} - w$$



6. Obere Halbebene auf Streifen

$$z = -2 \frac{w}{1 + w^2}$$

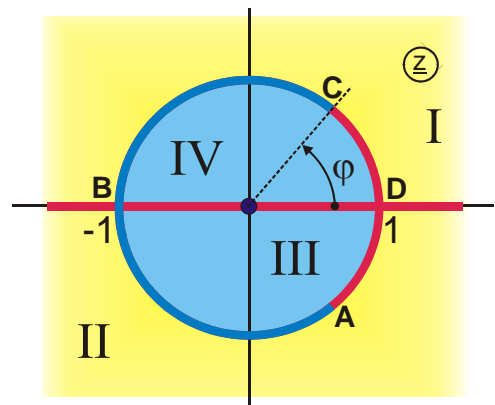
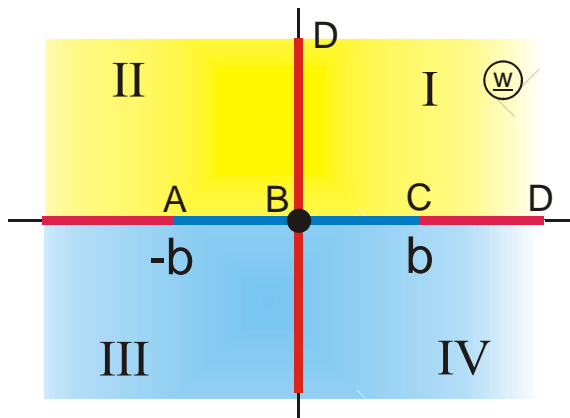
Dipol bei C in der z-Ebene



7. Obere Halbebene auf Kreisäußeres Untere Halbebene auf Kreisinneres

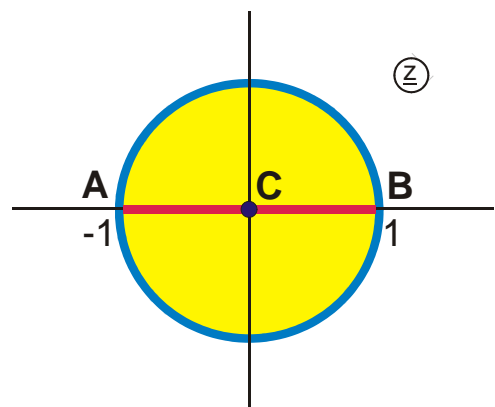
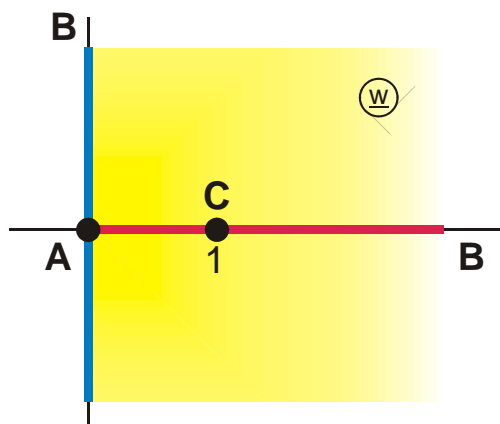
$$z = \frac{w+j}{w-j}$$

$$b = \frac{1}{\tan(\varphi/2)}$$



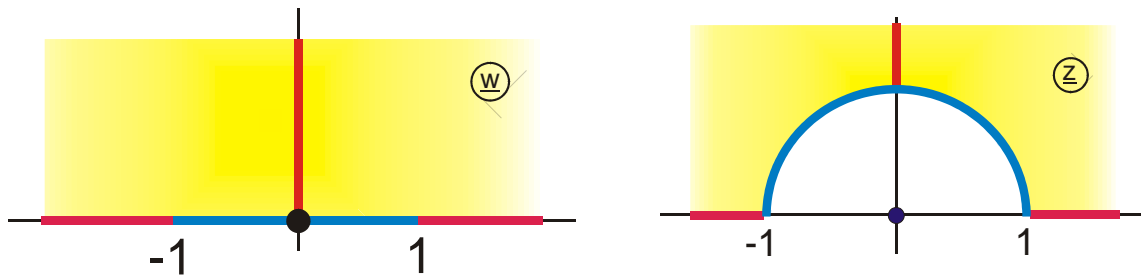
8. Rechte Halbebene auf Kreisinneres (Smith-Diagramm)

$$z = \frac{w-1}{w+1}$$



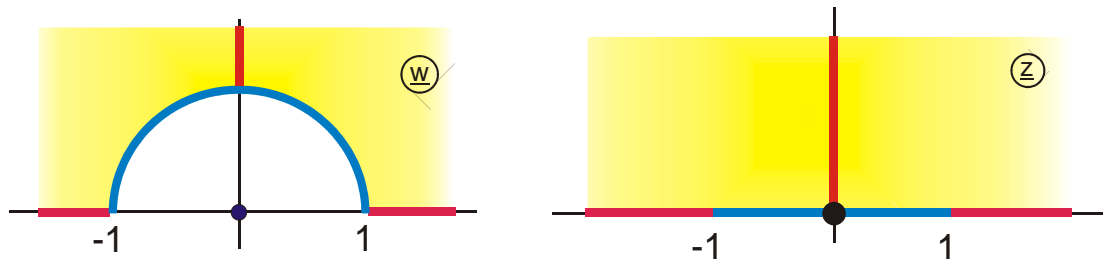
9. Streifen auf Kreis

$$z = w + \sqrt{w^2 + 1}$$



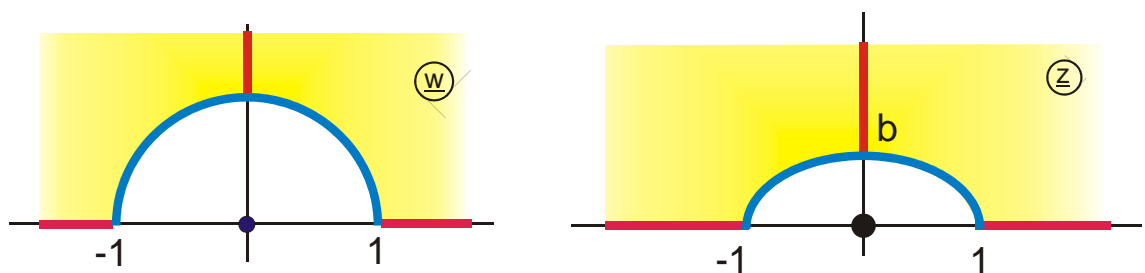
10. Kreis auf Streifen

$$z = \frac{1}{2}(w + 1/w)$$



11. Kreis auf Ellipse

$$z = \frac{1}{2} \left\{ w(1+b) + \frac{1-b}{w} \right\}$$

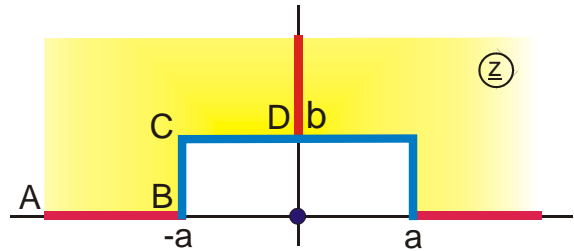
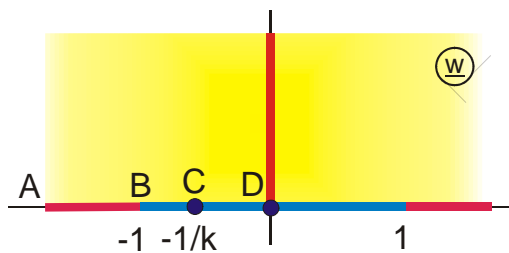


12. Streifen auf Rechteck

$$z = B_a \left(\frac{w}{k}, k \right) + jb$$

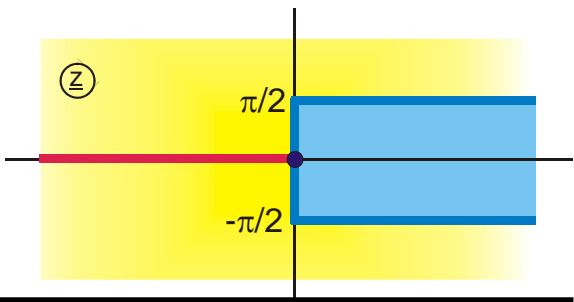
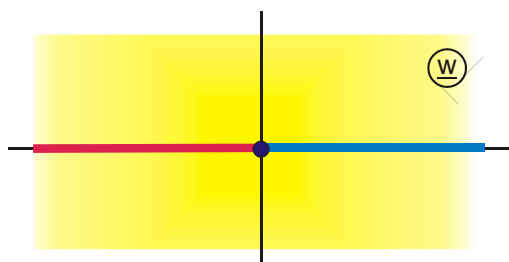
$$a = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2}$$

$$b = \frac{E'(k)}{k^2} - K'(k)$$



13. Halbgerade auf Halbstreifen

$$z = \sqrt{w(w-1)} + j \arcsin \sqrt{w}$$



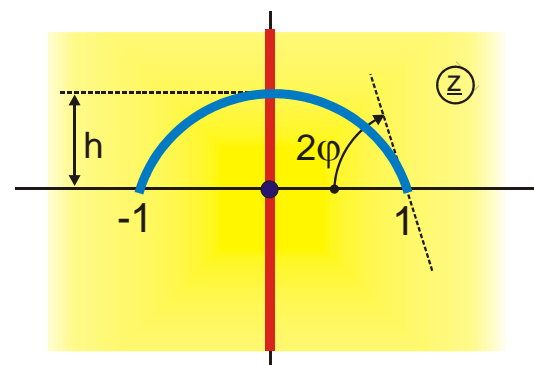
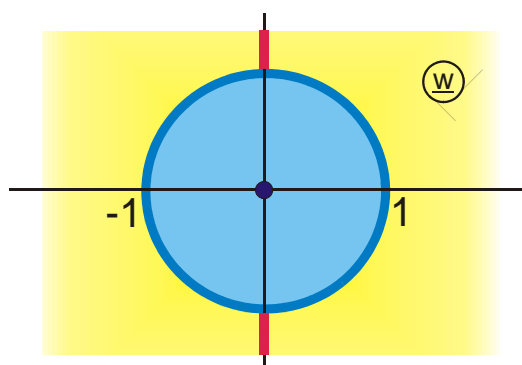
14. Kreis auf Kreisbogen

$$z = \frac{1}{2} (w_1 + 1/w_1)$$

$$w_1 = \frac{w + j \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

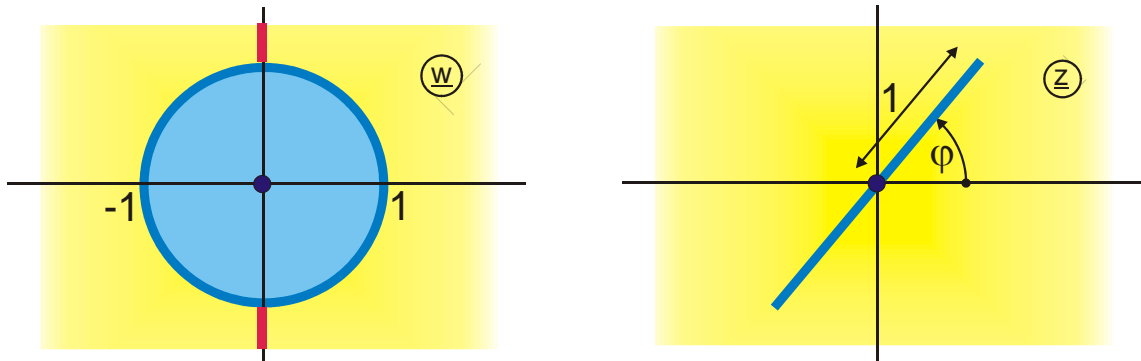
$$h = \tan \varphi$$

$$r = 1/\sin(2\varphi)$$



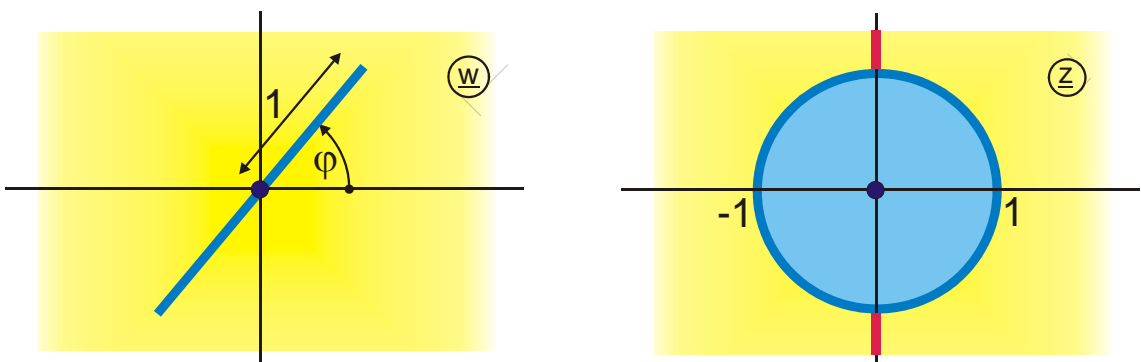
15. Kreis auf gedrehten Streifen

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{\exp(j2\varphi)}{w} \right)$$



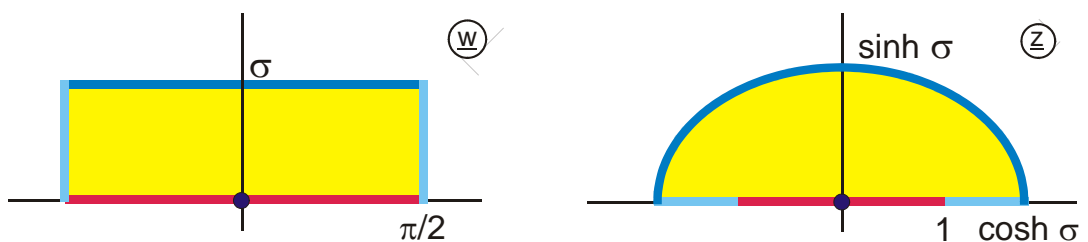
16. Gedrehter Streifen auf Kreis

$$z = w + \sqrt{w^2 - \exp(j2\varphi)}$$

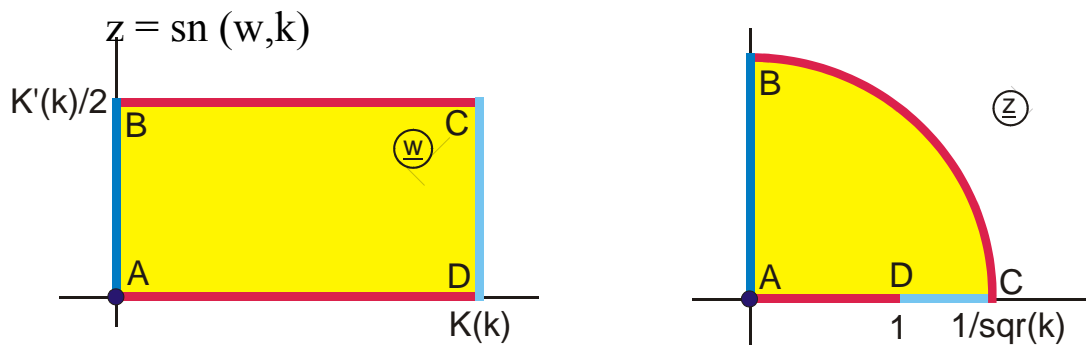


17. Rechteckinneres auf Ellipseninneres

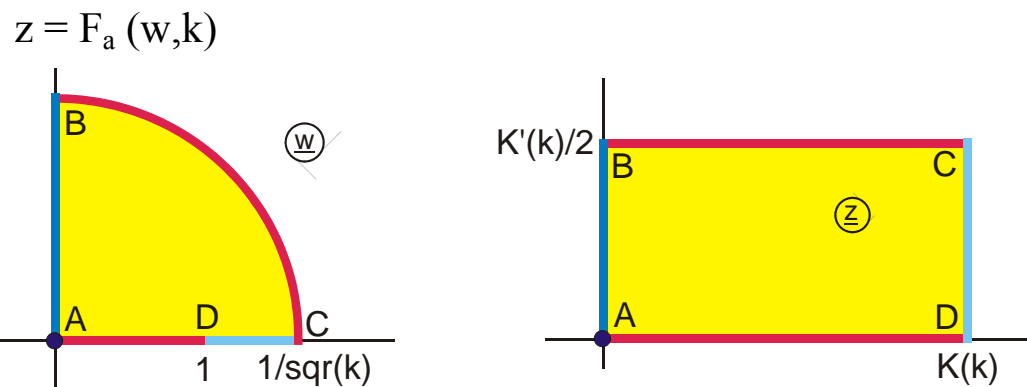
$$z = \sin w$$



18. Rechteckinneres auf Kreisinneres



19. Kreisinneres auf Rechteckinneres

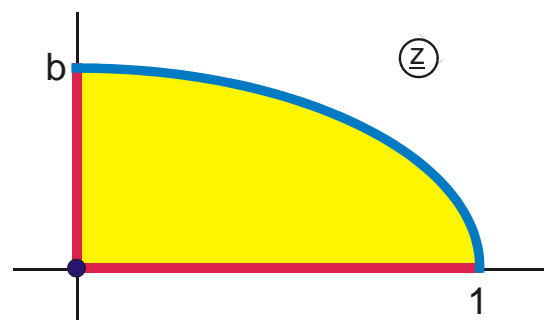
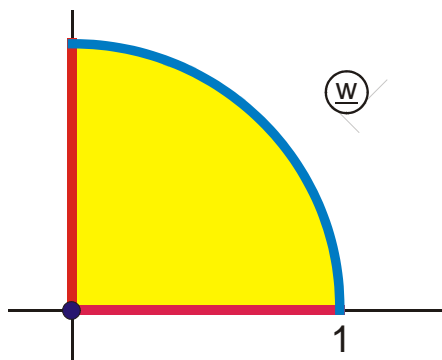


20. Kreisinneres auf Ellipseninneres

$$z = \sqrt{1-b^2} \sin \left\{ \frac{\pi}{2K(k)} F_a \left(\frac{w}{\sqrt{k}}, k \right) \right\}$$

$$\tau = \frac{4}{\pi} ar \tanh b$$

$$k = [\mathcal{G}_2(0, \tau) / \mathcal{G}_3(0, \tau)]^2$$

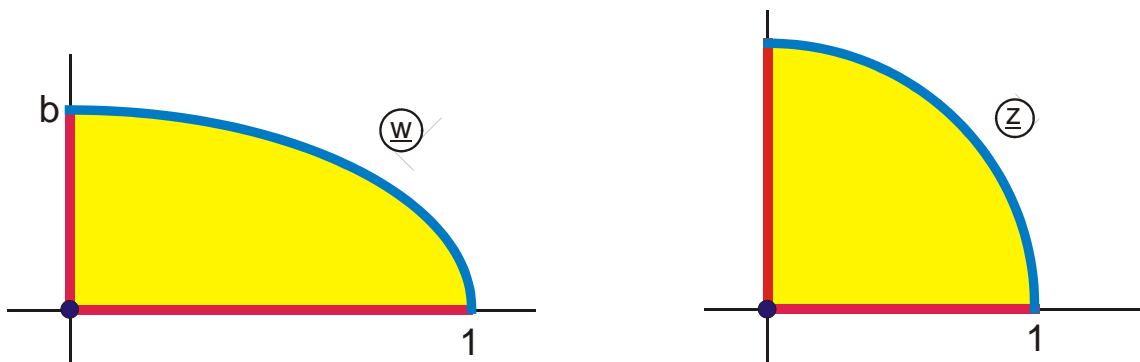


21. Ellipseninneres auf Kreisinneres

$$z = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left\{ \frac{2K(k)}{\pi} \arcsin \frac{w}{\sqrt{1-b^2}}, k \right\}$$

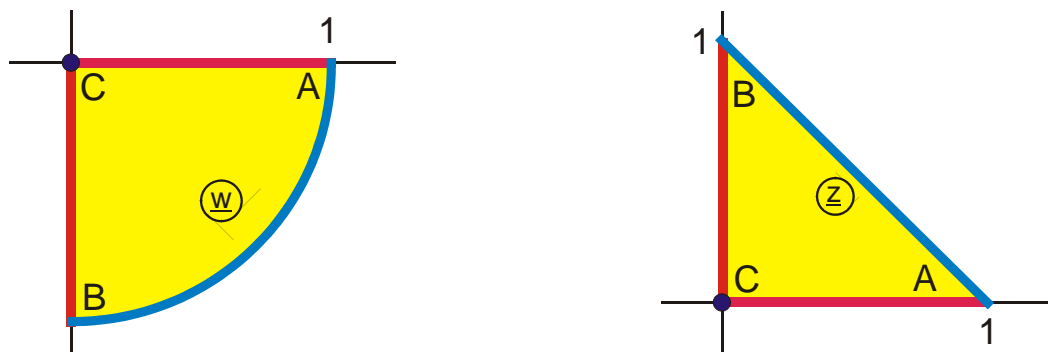
$$\tau = \frac{4}{\pi} \operatorname{ar} \tanh b$$

$$k = [\mathcal{G}_2(0, \tau) / \mathcal{G}_3(0, \tau)]^2$$



22. Viertelkreisinneres auf Dreieckinneres

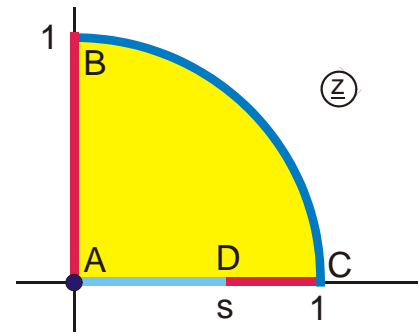
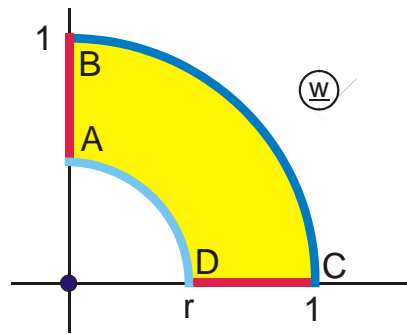
$$z = \frac{1}{K(k)} F_a \left(\sqrt{\frac{2w^2}{1+w^2}}, k \right) \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



23. Kreisringinneres auf Kreisinneres mit Streifen

$$z = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[K(k) + K'(k) \frac{\ln w}{\pi}, k \right] \quad \text{mit} \quad \tau = -\frac{\pi}{\ln r}$$

$$k = [\mathcal{G}_2(0, \tau) / \mathcal{G}_3(0, \tau)]^2 \quad s = \sqrt{k}$$



24. Kreisring auf den Bereich außerhalb zweier Kreise

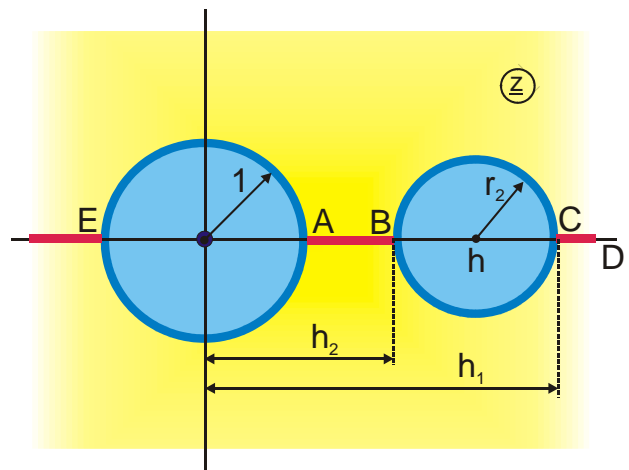
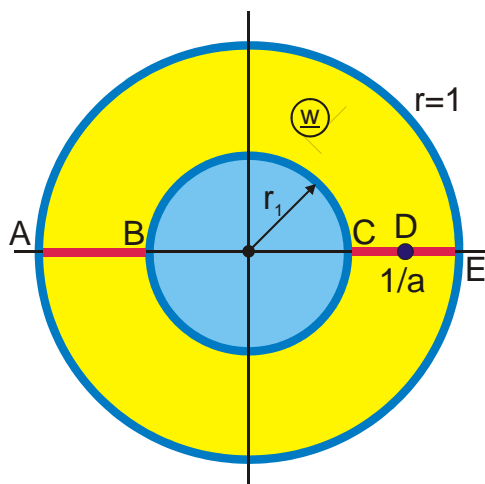
$$z = \frac{w-a}{aw-1}$$

$$a = \frac{h_1 h_2 + 1 + \sqrt{(h_1^2 - 1)(h_2^2 - 1)}}{h_1 + h_2}$$

$$r_1 = \frac{h_1 h_2 - 1 - \sqrt{(h_1^2 - 1)(h_2^2 - 1)}}{h_1 - h_2}$$

$$r_2 = r_1 \frac{1-a^2}{a^2 r_1^2 - 1}$$

$$h = a \frac{r_1^2 - 1}{a^2 r_1^2 - 1}$$



25. Bereich außerhalb zweier Kreise auf Kreisring

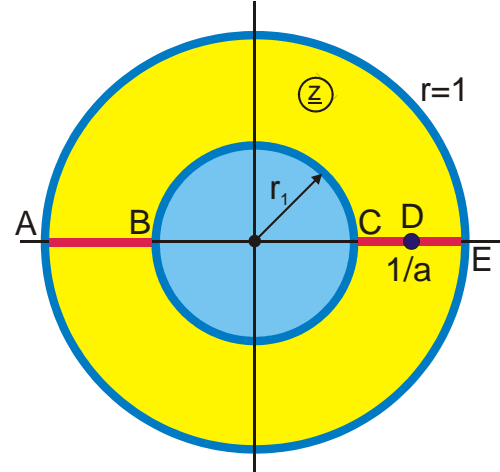
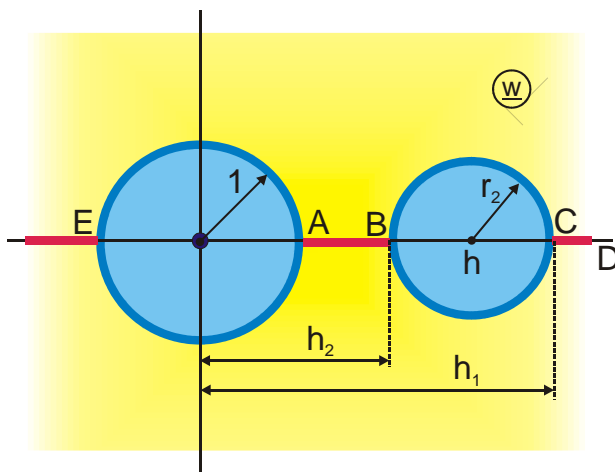
$$z = \frac{w-a}{aw-1}$$

$$a = \frac{h_1 h_2 + 1 + \sqrt{(h_1^2 - 1)(h_2^2 - 1)}}{h_1 + h_2}$$

$$r_1 = \frac{h_1 h_2 - 1 - \sqrt{(h_1^2 - 1)(h_2^2 - 1)}}{h_1 - h_2}$$

$$r_2 = r_1 \frac{1-a^2}{a^2 r_1^2 - 1}$$

$$h = a \frac{r_1^2 - 1}{a^2 r_1^2 - 1}$$

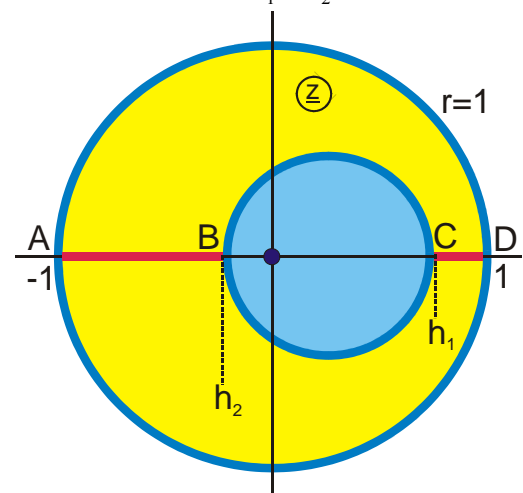
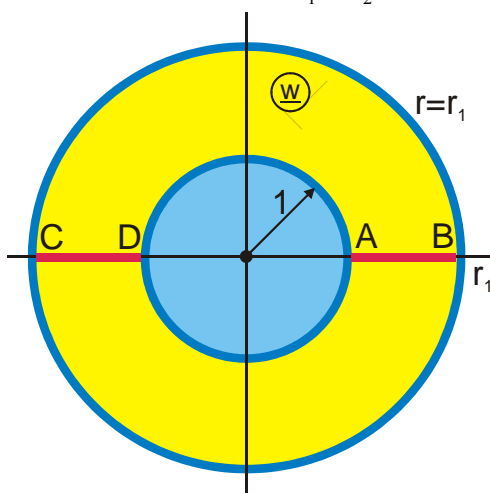


26. Kreisring auf exzentrischen Kreisring

$$z = \frac{w-a}{aw-1}$$

$$a = \frac{h_1 h_2 + 1 + \sqrt{(1-h_1^2)(1-h_2^2)}}{h_1 + h_2}$$

$$r_1 = \frac{-h_1 h_2 + 1 + \sqrt{(1-h_1^2)(1-h_2^2)}}{h_1 - h_2}$$



27. Zwei Kreise auf zwei Streifen

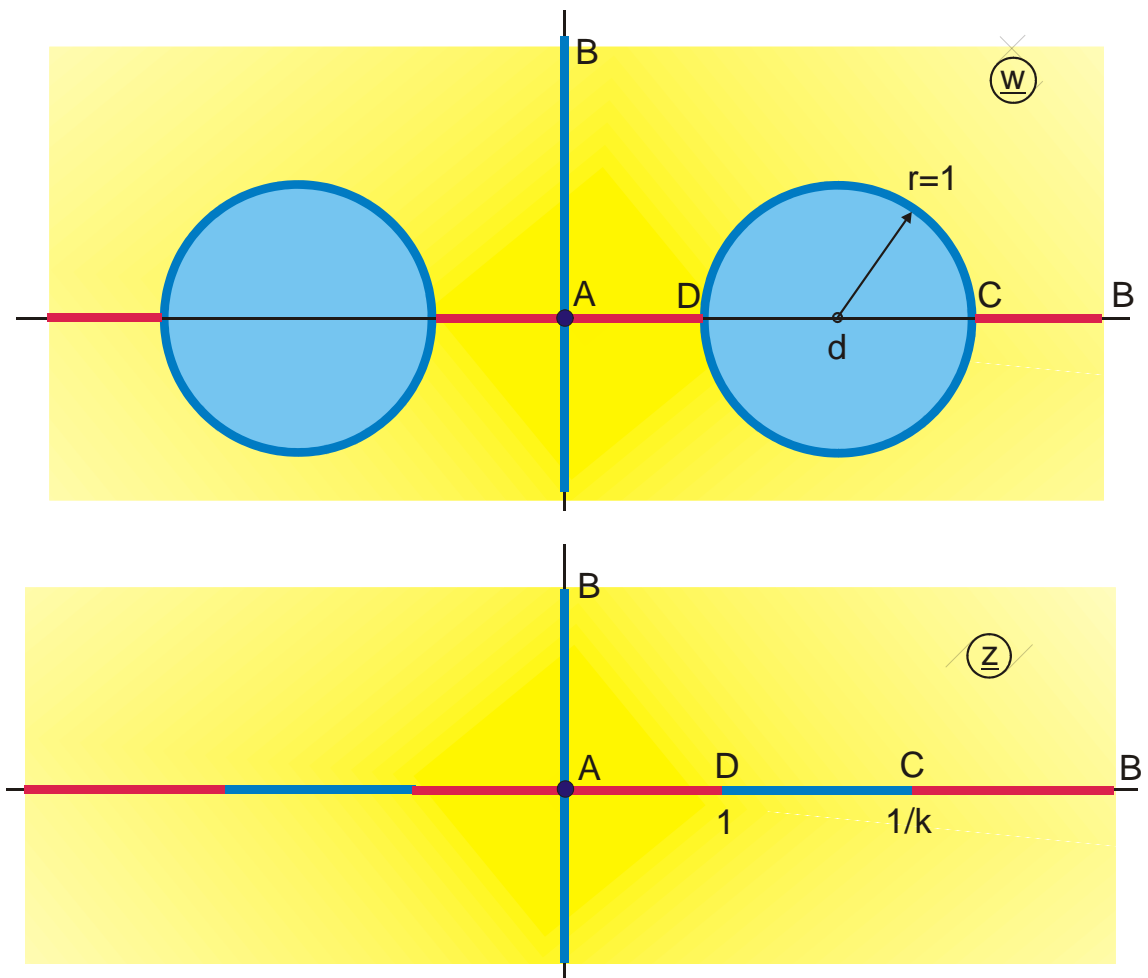
$$\underline{z} = sn \left[\frac{K(k)}{u_c \cdot \pi} \cdot ar \tanh(r_1 \cdot \underline{w}), k \right].$$

$$k = [\mathcal{G}_2(0, \tau) / \mathcal{G}_3(0, \tau)]^2$$

$$\tau = \frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{1}{2u_c}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sinh(2\pi u_c)}$$

$$u_c = \frac{1}{2\pi} \cdot ar \sinh \sqrt{d^2 - 1}$$

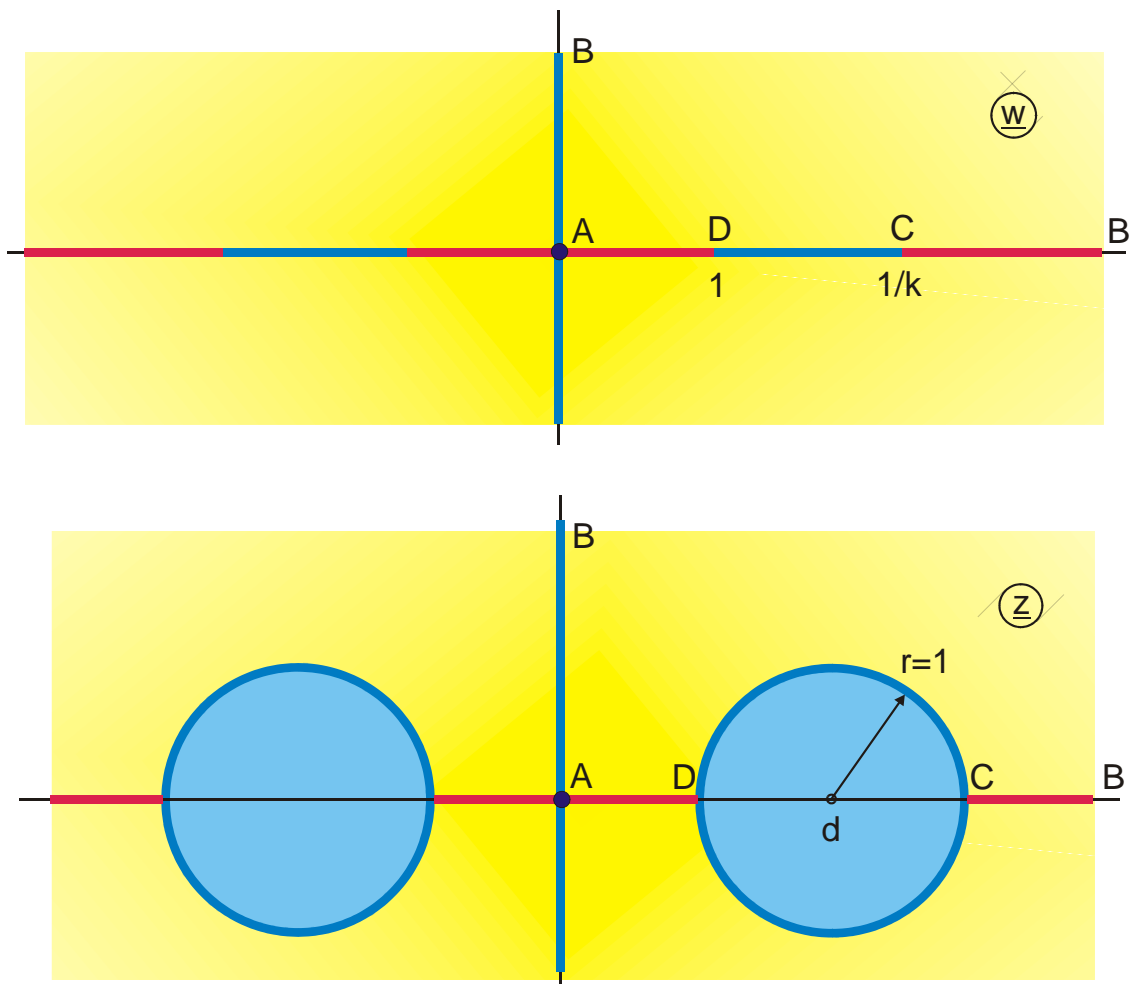


28. Zwei Streifen auf zwei Kreise

$$\underline{z} = \frac{1}{r_1} \tanh \left[\frac{u_c \pi}{K(k)} F_a(\underline{w}, k) \right]$$

$$r_1 = \frac{1}{\sinh(2\pi u_c)}$$

$$u_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{arsinh} \sqrt{d^2 - 1}$$

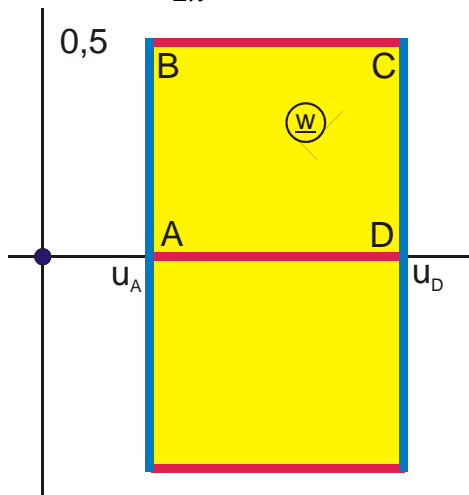


29. Rechteckinneres auf exzentrischen Kreisring (F 1.1)

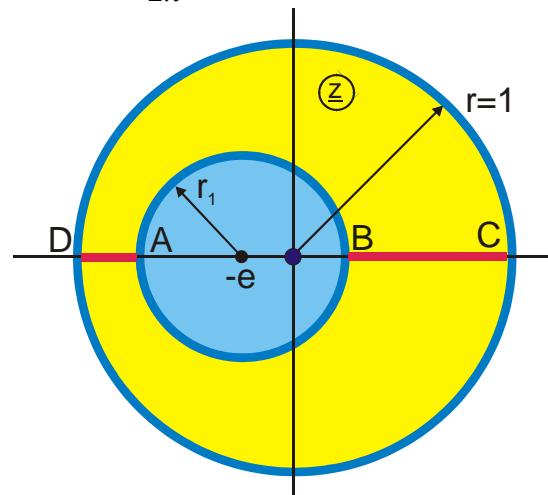
$$z = a \tanh(w\pi) - \sqrt{a^2 + 1}$$

$$a = \sqrt{(r_1^2 + 1 - e^2)^2 / 4 - r_1^2} / e$$

$$u_a = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arsinh} a$$

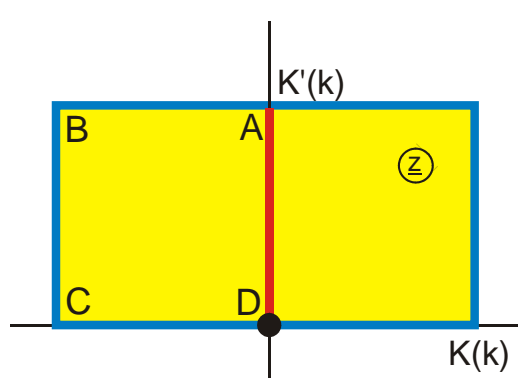
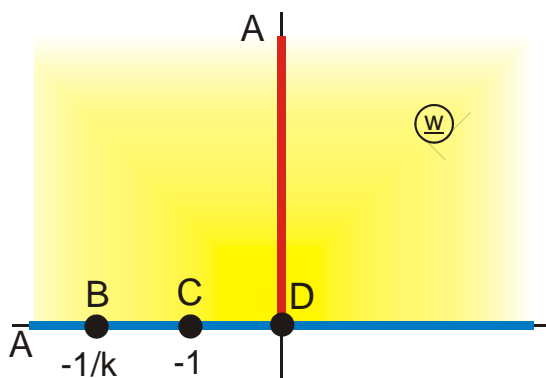


$$u_D = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arsinh}(a / r_1)$$



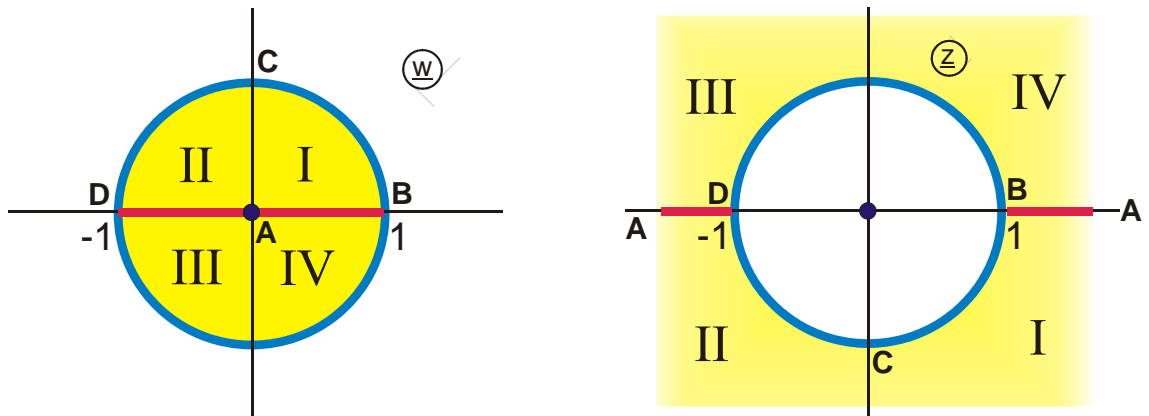
30. Obere Halbebene auf Rechteckinneres

$$z = F_a(w, k)$$



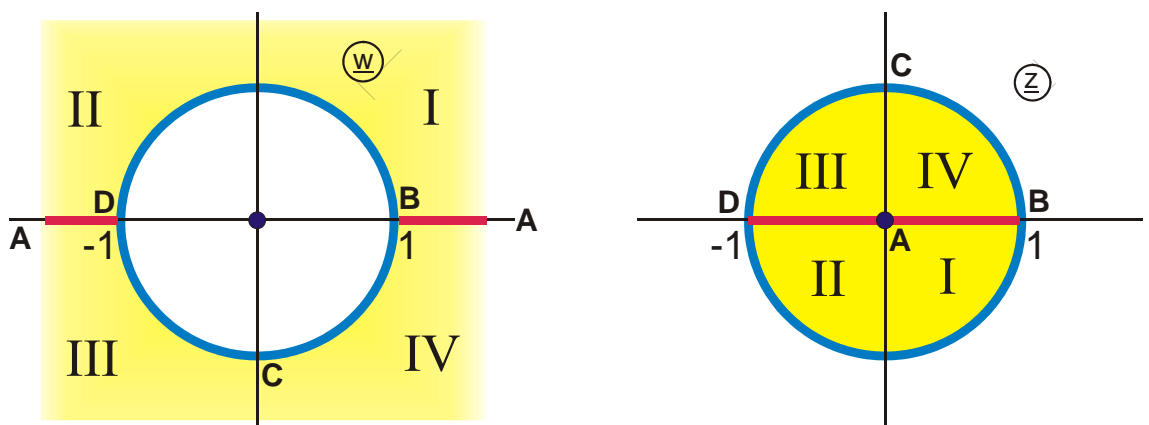
31. Kreisinneres auf Kreisäußeres (Q 1)

$$z = 1/w$$



32. Kreisäußeres auf Kreisinneres (Q 1)

$$z = 1/w$$

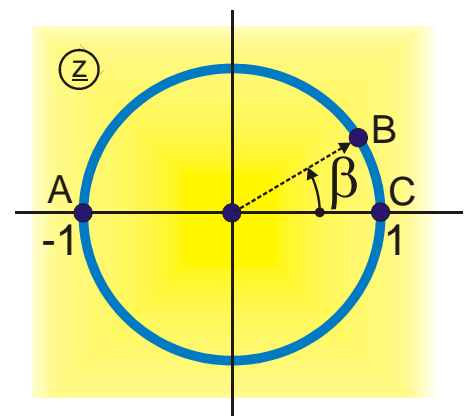
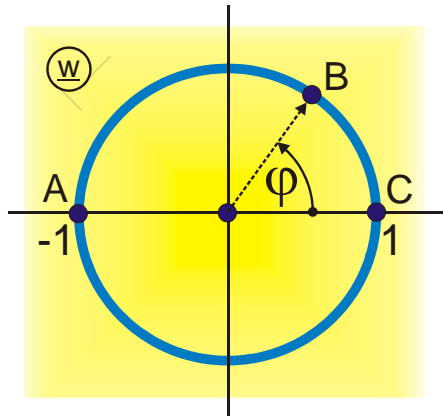


33. Einheitskreis auf Einheitskreis

$$z = \frac{b+w}{1+bw}$$

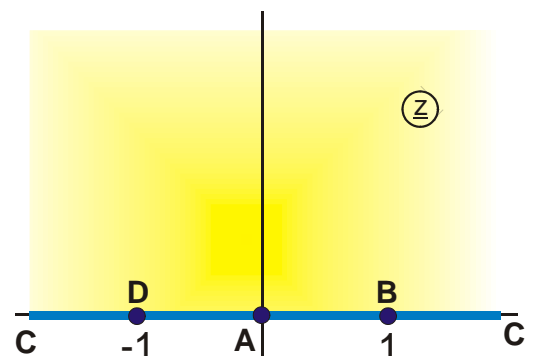
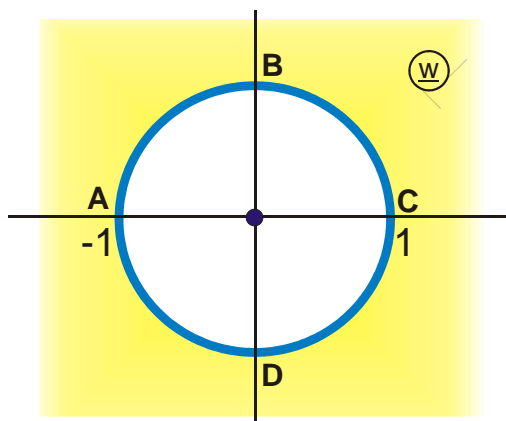
$$\beta = \arctan \frac{(1-b^2)\sin\varphi}{2b+(1+b^2)\cos\varphi}$$

$$-1 < b < +1$$



34. Kreisäußeres auf obere Halbebene

$$z = -j \frac{1+w}{1-w}$$



7. Überlagerung von Feldbildern

Bei der Überlagerung von Feldbildern in der \underline{z} -Ebene

$$\underline{z} = \underline{f}_1(\underline{w}) + \underline{f}_2(\underline{w}) \quad (1)$$

werden in jedem Punkt $P(x,y)$ zwei komplexe Zahlen \underline{f}_1 und \underline{f}_2 bzw. zwei Vektoren \vec{f}_1 und \vec{f}_2 addiert. Da ein Feldbild durch seine Elektroden bzw. allgemein durch seine Randbedingungen eindeutig festgelegt ist, reicht es aus, sich auf die Betrachtung dieser Ränder zu beschränken. Bei der Methode der Überlagerung von Feldbildern in der \underline{z} -Ebene werden mehrere bekannte Feldbilder so miteinander kombiniert, daß sich eine neue, gesuchte Berandung ergibt.

Beispiel 1: Erzeugen eines Kreises bzw. einer Ellipse

Addiert man zum Feldbild einer Halbebene mit herausragender Schneide (Abb. A 2.1)

$$\underline{f}_1(\underline{w}) = \sqrt{\underline{w}^2 + 1} \quad (2)$$

ein homogenes Feld $\underline{f}_2(\underline{w}) = \underline{w}$ (Bild 7.1), so ergibt sich entlang der Berandung mit zunehmendem u , beginnend bei $-\infty$, zunächst ein Bereich zwischen Punkt A und B, in dem beide Funktionswerte gleichartig entlang der reellen Achse verlaufen (Bild 7.1, rechte Seite, \underline{z} -Ebene). Ihre Summe bleibt somit ebenfalls auf der negativ reellen Achse. Im Bereich zwischen Punkt B und C verläuft Funktion $\underline{f}_1(\underline{w})$ vertikal nach oben und $\underline{f}_2(\underline{w})$ weiter horizontal: Die Summe beider Funktionen beschreibt somit einen sich aufwärts wölbenden Kreisbogen. Zwischen Punkt C und D verläuft dieser Kreisbogen dann wieder abwärts. Von Punkt D bis zu Punkt E bei $+\infty$ ergibt sich als Summe wieder die Gerade entlang der positiv reellen Achse.

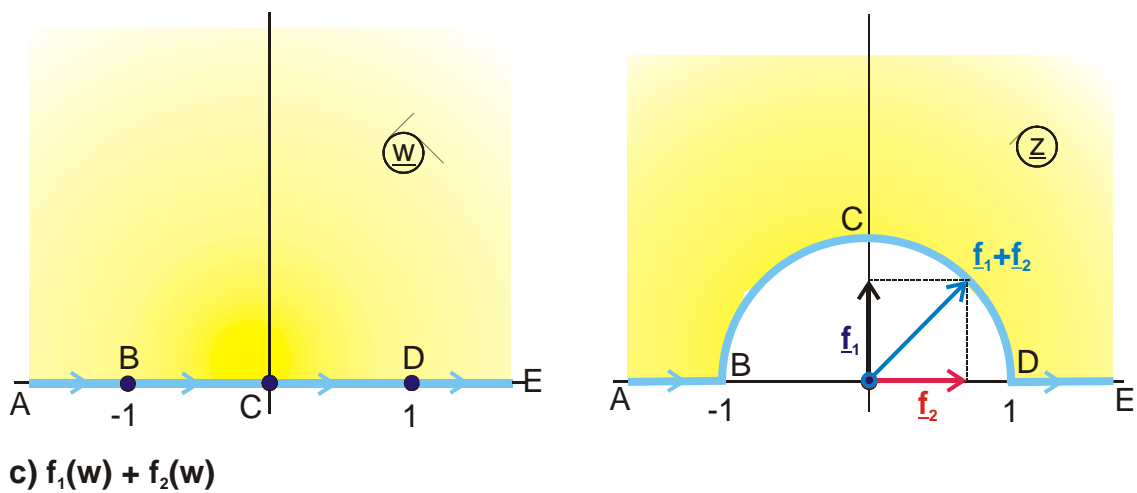
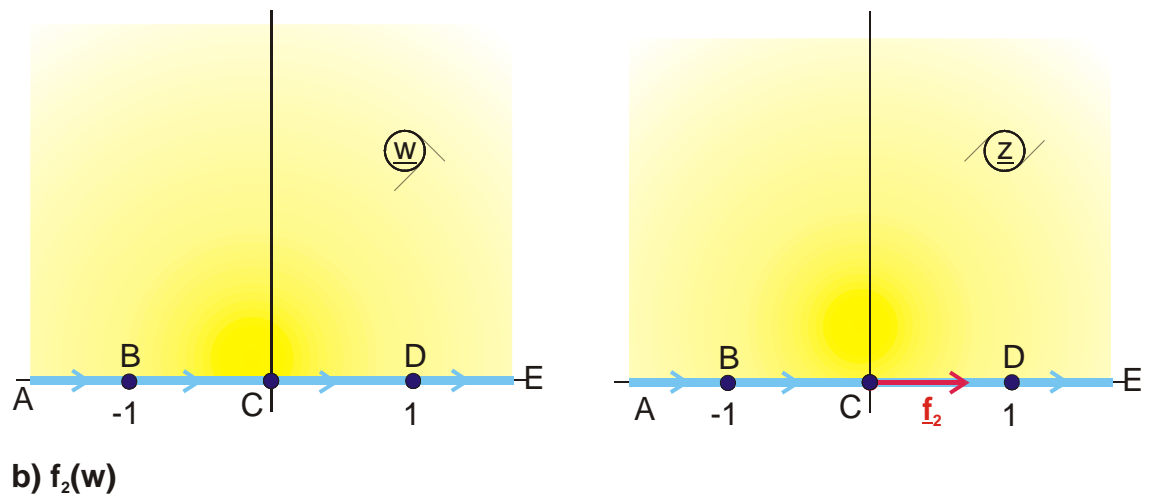
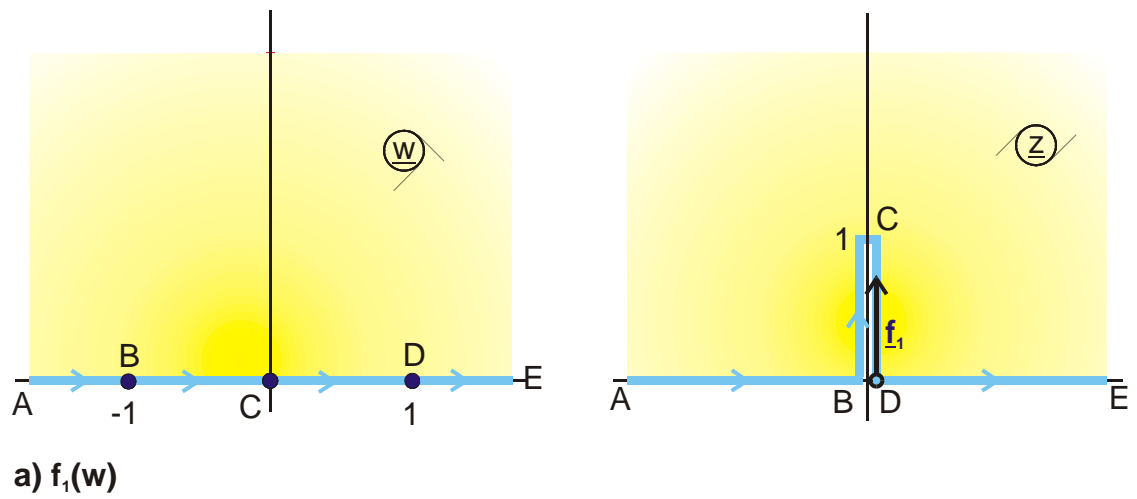


Bild 7.1: Beispiel 1 - Erzeugen eines Halbkreises

Für einen Punkt zwischen C und D sind in Bild 7.1 die beiden Radiusvektoren der komplexen Zahlen $\underline{f}_1(\underline{w})$ in schwarz und $\underline{f}_2(\underline{w})$ in rot eingetragen. Ihre Summe ergibt einen Punkt $\underline{f}_1(\underline{w}) + \underline{f}_2(\underline{w})$, der auf dem Kreisbogen liegt.

Die gesamte Abbildungsfunktion lautet (Abb. A 3):

$$\underline{z} = w + \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \quad (3)$$

Der Nachweis, daß sich ein Kreis ergibt, erfolgt z.B. über:

$$\text{Strecke } \overline{CD}: \underline{w} = u \text{ mit } u < 1 \quad \Rightarrow \quad x + jy = u + \sqrt{u^2 - 1} \quad (4)$$

$$x = u \quad y = \sqrt{1 - u^2} \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad (\text{Kreisgleichung}). \quad (6)$$

Multipliziert man $\underline{f}_1(\underline{w})$ mit b , so daß die Schneide nicht mehr die Höhe 1, sondern die Höhe b hat, ergibt sich im Feldbild nach der Überlagerung anstelle des Kreises eine Ellipse (Abbildung A 3.2) mit der vertikalen Halbachse b und der horizontalen Halbachse 1:

$$\underline{z} = w + b\sqrt{\underline{w}^2 - 1} \quad (7)$$

Beispiel 2: Umwandlung Schneide in Halbstreifen

Subtrahiert man vom Feldbild der Abbildung A 8

$$\underline{f}_1(\underline{w}) = \underline{w}\sqrt{\underline{w}^2 - 1} \quad (8)$$

das Innere eines Halbstreifens (Abb. A 7)

$$\underline{f}_2(\underline{w}) = \text{arcosh}(\underline{w}) - j\pi/2, \quad (9)$$

so ergibt sich Abb. A 5. (Bild 7.2):

$$\underline{z} = f_1(\underline{w}) - f_2(\underline{w}) = \underline{w}\sqrt{\underline{w}^2 - 1} - \operatorname{ar} \cosh \underline{w} + j\frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

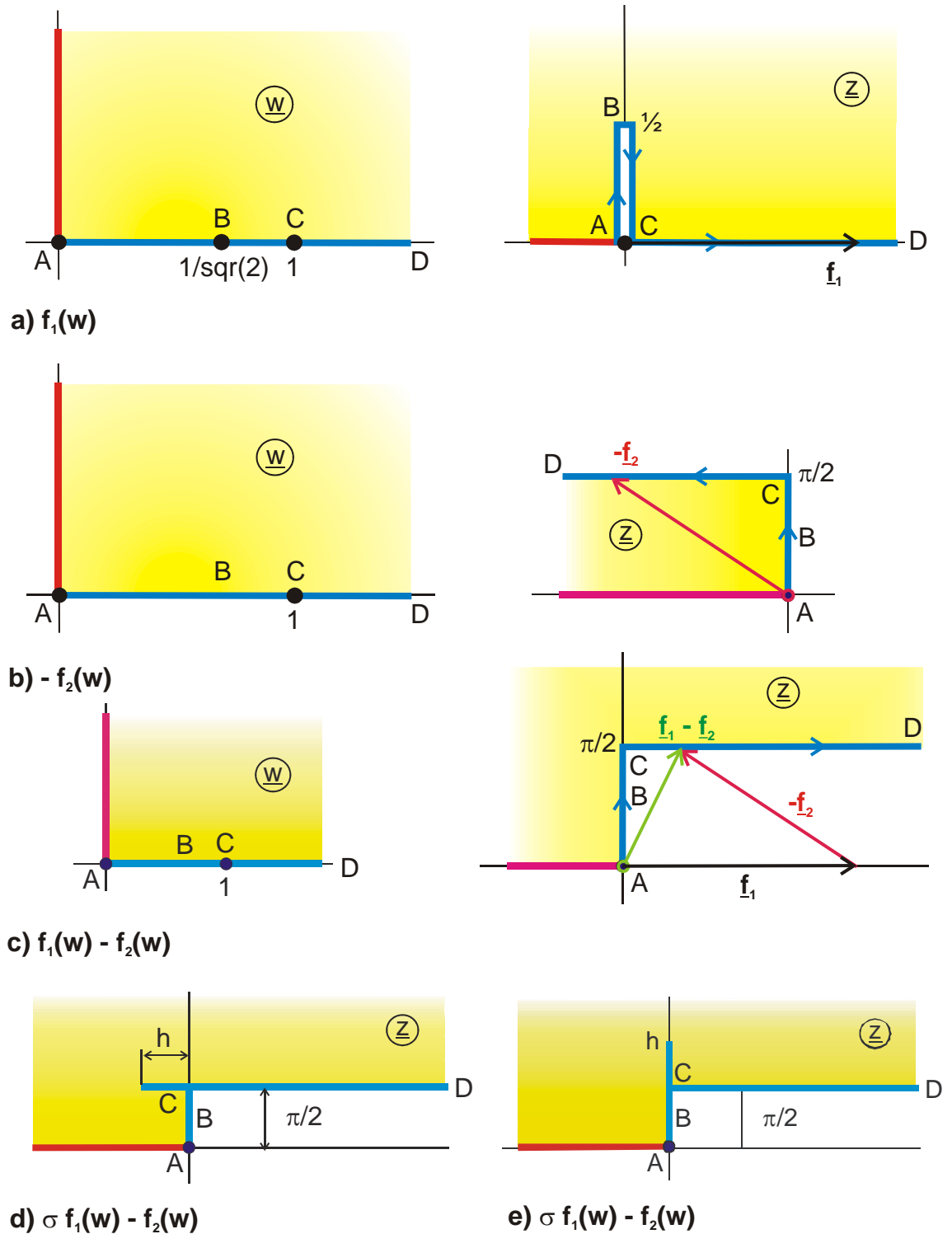


Bild 7.2: Beispiel 2

In Bild 7.2a ist $f_1(\underline{w})$ und in Bild 7.2b ist $-f_2(\underline{w})$ dargestellt. Bild 7.2c zeigt die Summe $f_1(\underline{w}) + \{-f_2(\underline{w})\}$. Von Punkt A bis Punkt C verlaufen beide Kurven vertikal auf der imaginären Achse, insofern ergibt auch die Summe Werte auf der imaginären Achse. Im Bereich zwischen Punkt C und D verlaufen beide Kurven horizontal, um $j\pi/2$ gegeneinander versetzt. Da der Realteil von $f_1(\underline{w})$ stets größer ist als der Betrag des Realteils von $f_2(\underline{w})$, liegt die Summe auf der Geraden $x + j\pi/2$ im I. Quadranten.

Verändert man dieses Größenverhältnis durch einen Faktor $\sigma < 1$ vor $f_2(\underline{w})$, dann liegt die Summe zeitweilig im II. Quadranten und es ergibt sich Abb. A 5.3 (Bild 7.2d).

$$z = \sigma f_1 - f_2 = \sigma w \sqrt{w^2 - 1} - \operatorname{ar} \cosh w + j \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

Für $\sigma > 1$ wird die vertikale Berandung im Bereich A-C größer als $\pi/2$ (Abb. A 5.4 , Bild 7.2e).

Beispiel 3: Rechtwinklig geknickter Kanal

Die Funktion

$$f_1(\underline{w}) = 2a \operatorname{ar} \tanh \underline{w}_1 \quad \text{mit} \quad \underline{w}_1 = \sqrt{\frac{\exp(\pi \underline{w}) - 1}{\exp(\pi \underline{w}) + a^2}} \quad (12)$$

ergibt das Feldbild einer Linienladung bei A im Innern eines nach rechts gerichteten Halbstreifens (Abb. H 2.3). Die Funktion

$$f_2(\underline{w}) = -2 \operatorname{arctan}(a \underline{w}_1) \quad (13)$$

ergibt das Feldbild einer Linienladung bei C im Innern eines nach oben gerichteten Halbstreifens. Die Summe beider Abbildungsfunktionen $z = f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w})$ ergibt das Feldbild in einem rechtwinklig abgeknickten Kanal (Abb. D 4).

Wie in Bild 7.3 skizziert verlaufen $f_1(\underline{w})$ und $f_2(\underline{w})$ von Punkt A nach Punkt B vertikal auf der imaginären Achse. Die Summe $f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w})$ ergibt damit die rechte vertikale Berandung des Kanals. Punkt A von $f_2(\underline{w})$ bleibt unverändert bei $+j\infty$. Von B nach C verlaufen beide Funktionen auf der reellen Achse. Die Summe ergibt die obere horizontale Berandung des Kanals.

In gleicher Weise ergeben die Strecken von D nach E die linke vertikale Berandung des Kanals und die Strecken von E nach F die untere horizontale Berandung des Kanals. Die Linienladungen in den Punkten $A = D$ und $C = F$ werden jeweils nach ∞ abgebildet. Sie bewirken, daß die Strömung innerhalb des Kanals von einem Ende zum anderen fließt. Für $a = 1$ wird der Zufluß des Kanals ebenso breit wie der Abfluß.

Mit dem gleichen Verfahren wurden u.a. die Abbildungen H 10, C 5, C 5.1 und C 5.2 gewonnen.

Beispiel 4: Überlagerung der gleichen Funktion, um Δ verschoben

Die Funktion

$$f(\underline{w}) = Z_e(\underline{w}, k) + ja \quad (14)$$

bildet ein Rechteck ab auf einen Streifenleiter, der parallel zu einer unendlich ausgehenden leitenden Ebene verläuft (Abb. E 2, Bild 7.4). Durch die Transformation

$$f(\underline{w}) = f(\underline{w} + \Delta) + f(\underline{w} - \Delta) \quad (15)$$

ergibt sich mit $\Delta = j\sigma$

$$\underline{z} = Z_e(\underline{w} + j\sigma, k) + Z_e(\underline{w} - j\sigma, k). \quad (16)$$

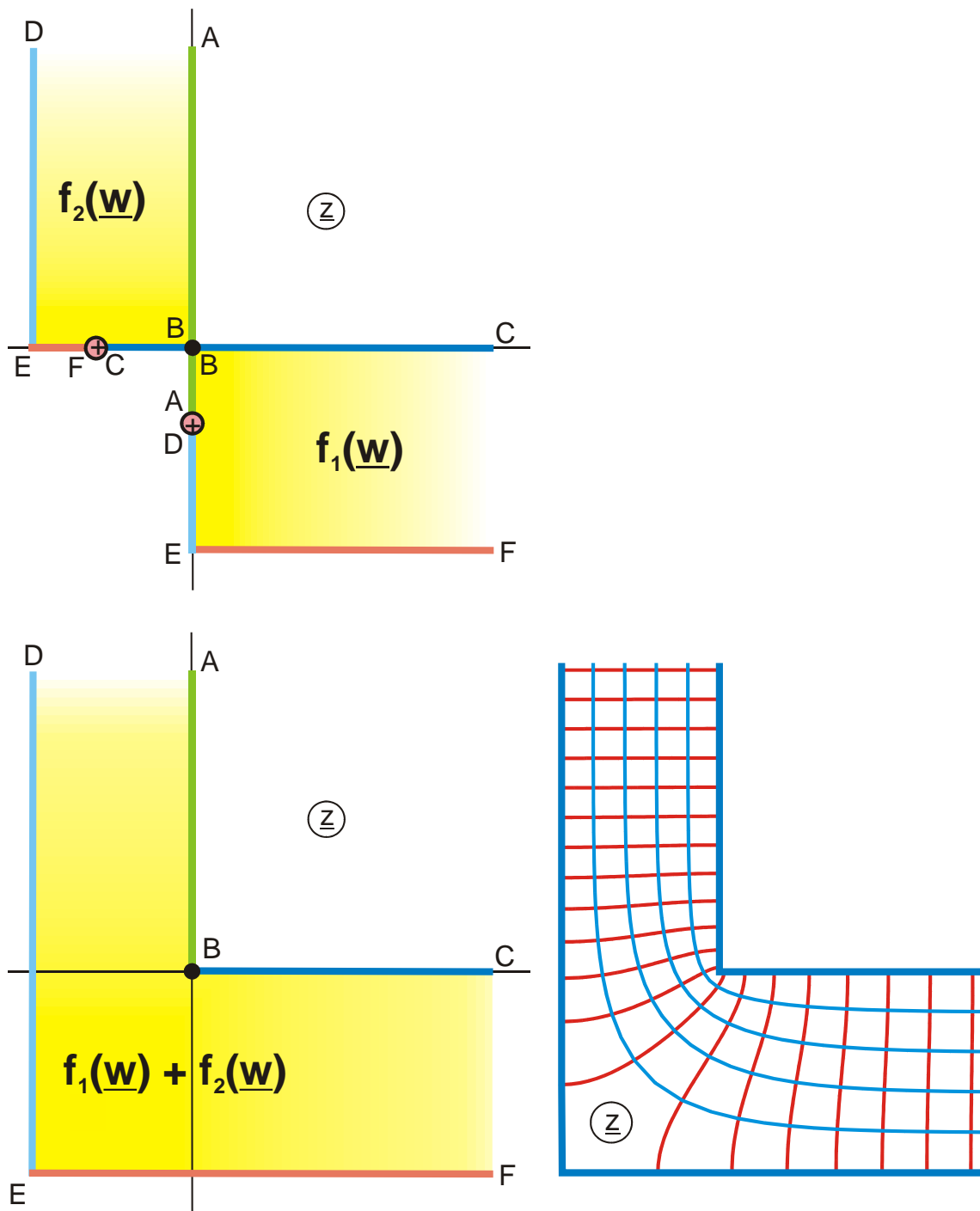


Bild 7.3: Beispiel 3, Abb. D 4

Durch die Verschiebung um $j\sigma$ im homogenen Feld der \underline{w} -Ebene wird die unterste Linie, die **unendlich lange** Potentiallinie DE in der \underline{z} -Ebene in Bild 7.4 ausgelassen. Aufgrund der $\pm\Delta$ -Transformation wird die um $j\sigma$ verschobene, krummlinige, **endlich lange** Potentiallinie auf eine Gerade abgebildet, die parallel zur reellen Achse verläuft ($+j\sigma - j\sigma = 0$, die Imaginärteile der Funktionen heben sich gegenseitig auf). Es ergibt sich das Feldbild zweier paralleler Leiterstreifen unterschiedlicher Breite (Abb. F 5, Bild 7.5) mit dem Abstand $2a$. Mit dem gleichen Verfahren wurden u. a. die Abbildungen P 4.2 und P 4.3 erzeugt.

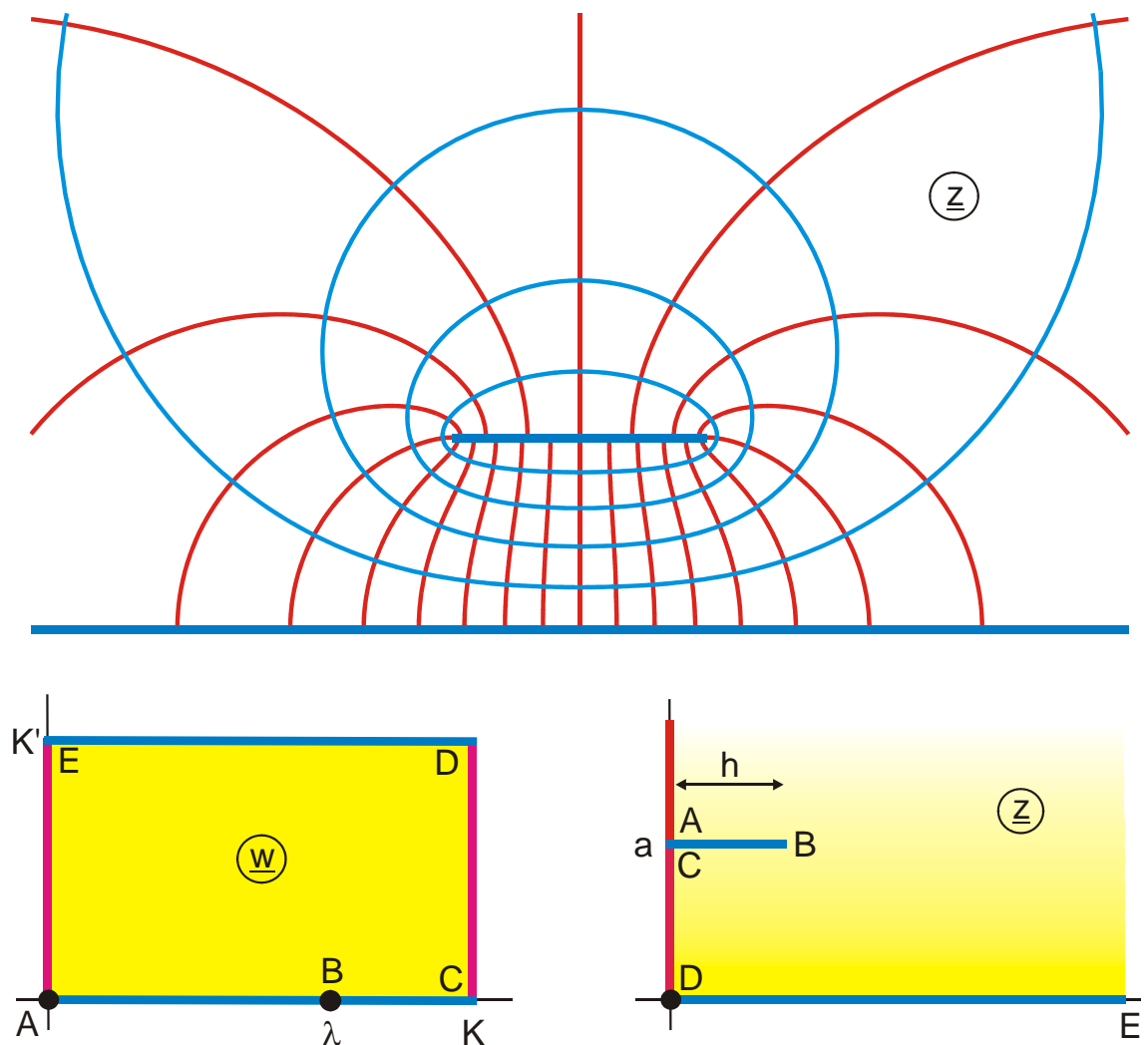


Bild 7.4: Abbildung E 2

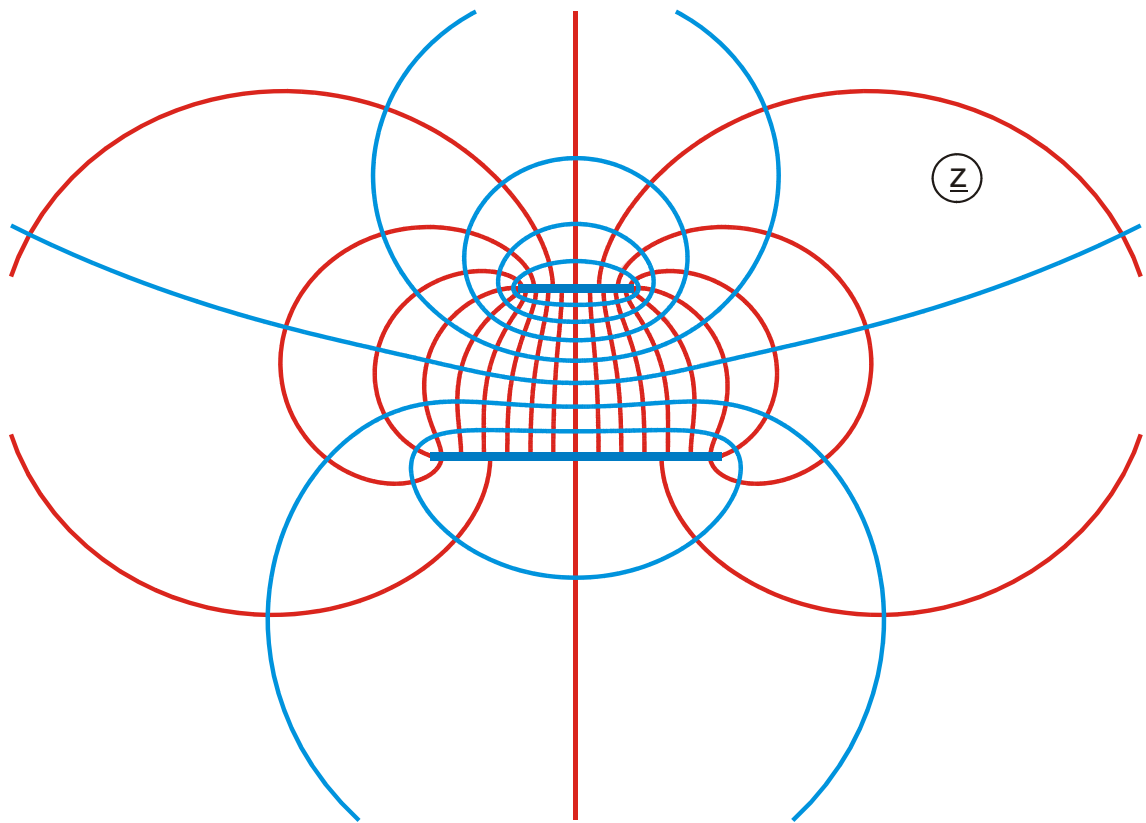


Bild 7.5: Beispiel 4, Abbildung F 5

Beispiel 5: Einfügen einer Unterbrechung in die Berandung

Die Abbildung P 7.3:

$$z = B_a(w_1, k) + jB_a(w_2, k) - h - jh = f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w}) \quad (17)$$

$$w_1 = \sqrt{1 + w_0} \quad (18)$$

$$w_2 = \sqrt{1 + 1/w_0} \quad w_0 = \cosh(w\pi) \quad (19)$$

$$k = 1/\text{sqr}(2) \quad h = 2E(k) - K(k) \quad (20)$$

kann man durch Addition der beiden Funktionen $f_1(\underline{w})$ und $f_2(\underline{w})$ erzeugen. Wie in Bild 7.6 skizziert, ist jede der beiden Funktionen $f(\underline{w})$ verwandt mit einem 1/8 großen Aus-

schnitt aus dem Außenfeld einer quadratischen Elektrode (Sonderfall von Abb. B 4, aber mit einer anderen Vorabbildung). Das Feldbild hat eine umlaufende geschlossene Berandung von Punkt A bis Punkt E mit einer Polstelle. Beide Berandungen sind gleich und haben die gleichen Abmessungen. Nur der Umlaufsinn und die Lage in der \underline{z} -Ebene sind unterschiedlich. In Bild 7.6 sind dargestellt:

$$f_1(w) = B_a(w_1, k) - h/2 - jh/2 \quad (21)$$

und

$$f_2(w) = jB_a(w_2, k) - h/2 - jh/2 \quad (22)$$

Wenn bei der Überlagerung $f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w})$ die Radiusvektoren auf dem dunkelblau gefärbten Rand von C nach A addiert werden, beginnt die Summenkurve $f(\underline{w})$ wegen $C_1 = h/2 (1+j)$ und $C_2 = \infty$ unter 45° im Unendlichen bei C. Anschließend verläuft sie entlang der 45° -Geraden auf den Koordinatenursprung zu. Da f_1 immer größer und f_2 immer kleiner wird, erreicht die Summe nicht den Koordinatenursprung, sondern die Richtungsänderung der Summe wird im Punkt B zu 0 und dreht sich dann um. Punkt B liegt bei $d (1+j)$ mit $d > h$. Wegen $A_2 = h/2 (1+j)$ und $A_1 = \infty$ endet sie im Punkt A wieder unter 45° im Unendlichen. Die bei den Einzelfunktionen geschlossene Berandung wird so zwischen B und D geöffnet.

Punkt D_1 ist bei $h/2 (1-j)$ und Punkt D_2 ist bei $h/2 (-1+j)$. Damit liegt die Summe im Koordinatenursprung. Die Summenpunkte der Radiusvektoren, deren Endpunkte sich auf den hellblauen horizontalen Geraden befinden, liegen alle auf der reellen Achse der \underline{z} -Ebene. Der vertikale Versatz um $\pm jh/2$ hebt sich dabei wechselseitig auf.

In gleicher Weise addieren sich die Punkte entlang der beiden roten Geraden DC ebenfalls zu Summenpunkten auf der imaginären Achse der \underline{z} -Ebene. Der Versatz um $\pm h/2$ hebt sich gegenseitig auf. Die Laufrichtung entlang der Geraden DE und DC ist bei beiden Funktionen gleich, sodaß sich hier für die Summe keine Richtungsumkehr ergeben kann. Die positive reelle Achse und die positive imaginäre Achse sind kontinuierlich belegt.

Die hier gefundene Randabbildung läßt sich auch ohne elliptische Funktionen erzeugen (Abb. D 2.5 mit $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 45^\circ$ und geänderter Vorabbildung).

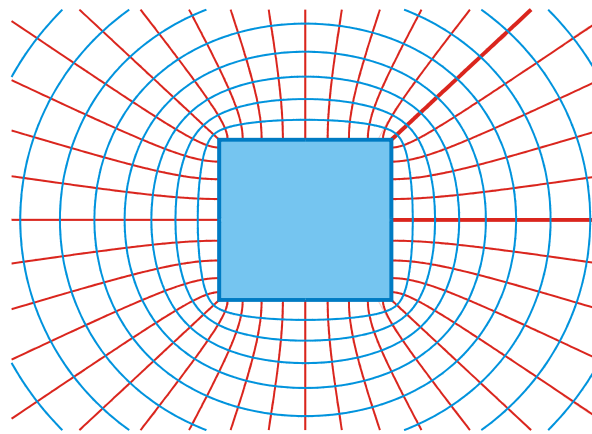


Abb. B 4

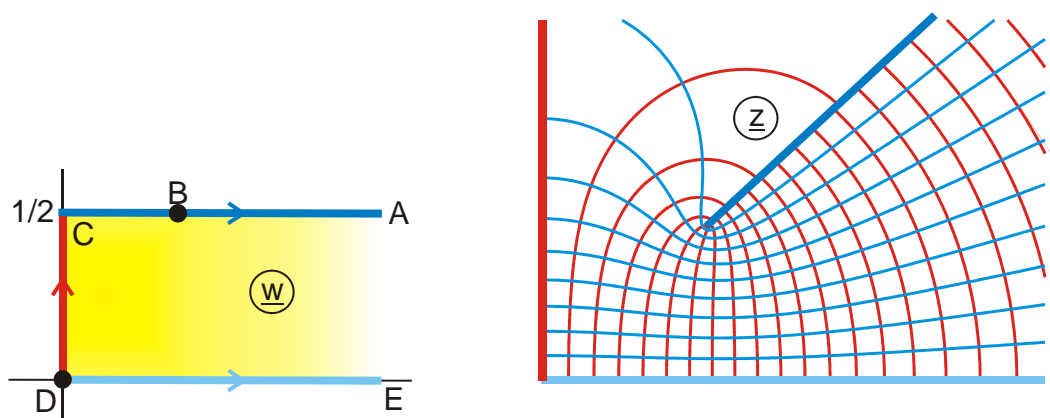
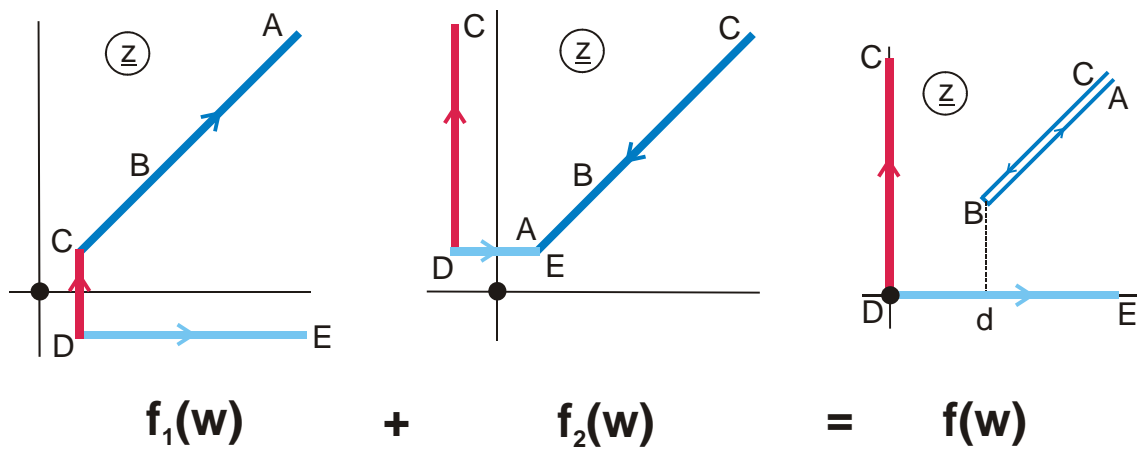
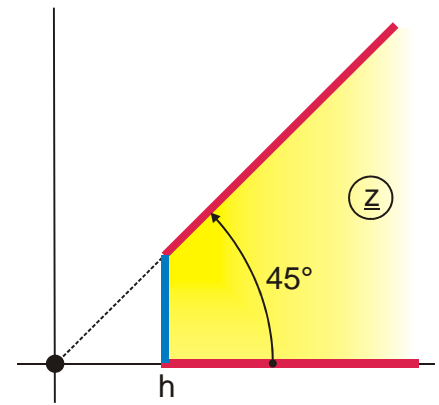


Abb. P 7.3

Bild 7.6: Beispiel 5

8. Elektroden im homogenen Feld

8.1 Senkrechter Einfall des homogenen Feldes

Bild 8.1 zeigt am Beispiel eines Kreiszylinders den Unterschied zwischen dem Feldbild einer Elektrode gegen Unendlich (Bild 8.1a) und dem Feldbild einer Elektrode im homogenen Feld bzw. in homogener Strömung (Bild 8.1b). Im ersten Fall befindet sich im Punkt $z = \infty$ eine Linienladung. Im zweiten Fall ist dort ein Liniendipol. Dieser Liniendipol läßt sich anschaulich auftrennen in zwei Linienladungen: Das homogene Feld wird erzeugt von einer positiven Linienladung bei $y = +\infty$ und einer negativen Linienladung bei $y = -\infty$.

Das Vorhandensein eines homogenen Feldes in der z -Ebene wird im folgenden durch den Vektorpfeil der elektrischen Feldstärke \vec{E} gekennzeichnet. Der Pfeil zeigt in Richtung der Feldlinien. Er steht senkrecht auf den Potentiallinien. Die Feldbilder von Elektroden im homogenen Feld sind in Abbildungsgruppe R zusammengestellt. Außerdem gehören noch viele Abbildungen aus anderen Gruppen (z.B. A, D, C ...) dazu. Die meisten davon sind in Kapitel 15 R zusätzlich aufgeführt. Wie in Bild 8.2 dargestellt, ergibt z.B. Abb. A 10.2, symmetrisch ergänzt, das Feldbild eines Rechteckzylinders im homogenen Feld. In Bild 8.2b ist die reelle Achse außerhalb des Rechtecks aus Symmetriegründen eine Potentiallinie. In Bild 8.2a wird diese Linie als leitende Oberfläche interpretiert.

Feldbilder mit zwei unendlich ausgedehnten Elektroden ungleicher Ladung lassen sich in solche mit homogenem Feld umwandeln, indem man durch eine geeignete Vorabbildung im Punkt ∞ einen Liniendipol anbringt.

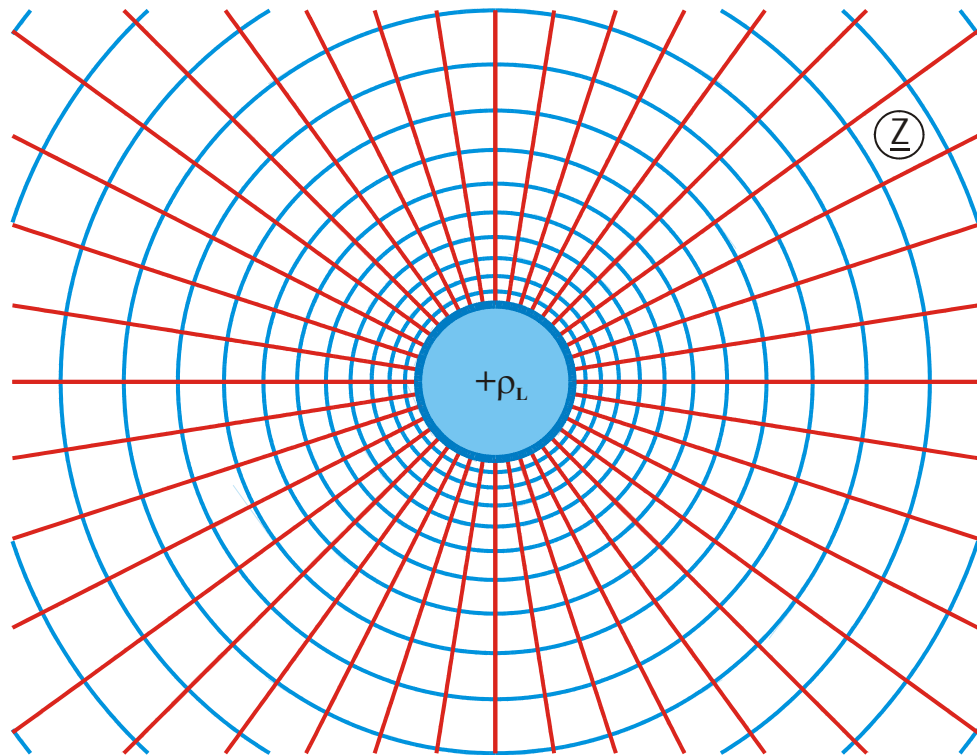


Bild 8.1a: Geladener Kreiszylinder gegen ∞ (B 1)

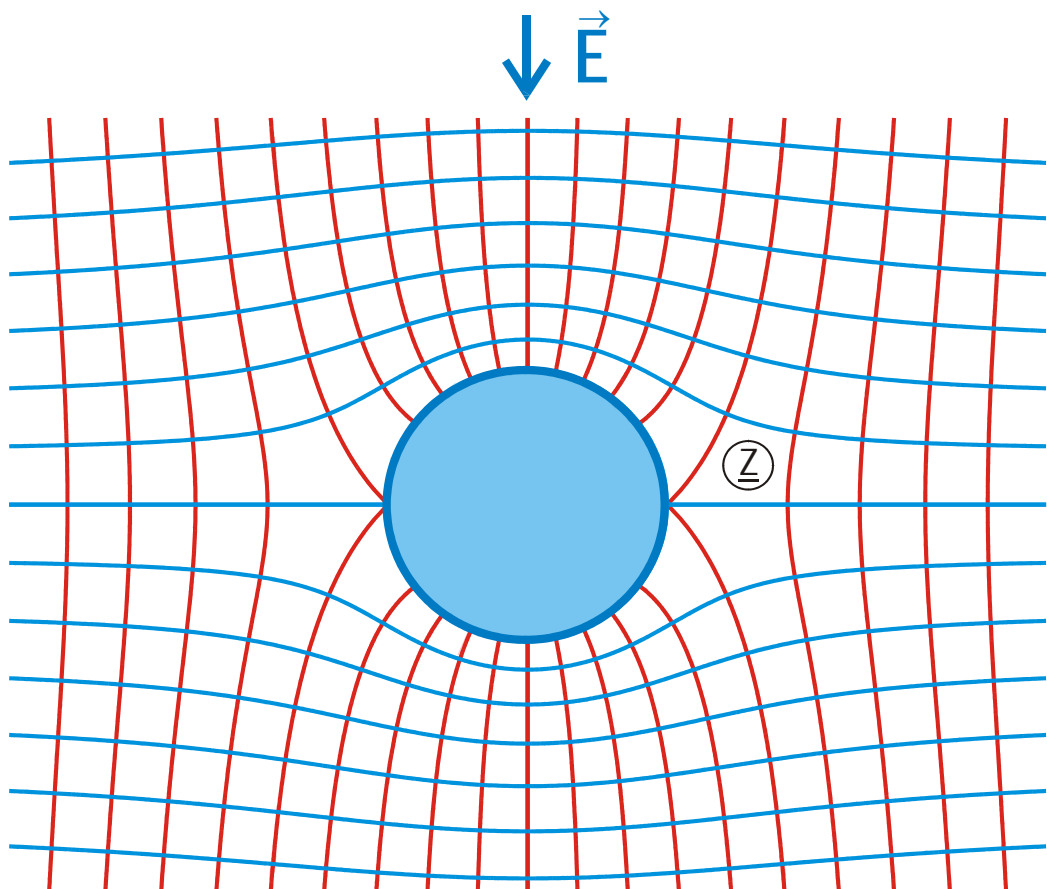


Bild 8.1b: Leitender Kreiszylinder im homogenen Feld (A 3)

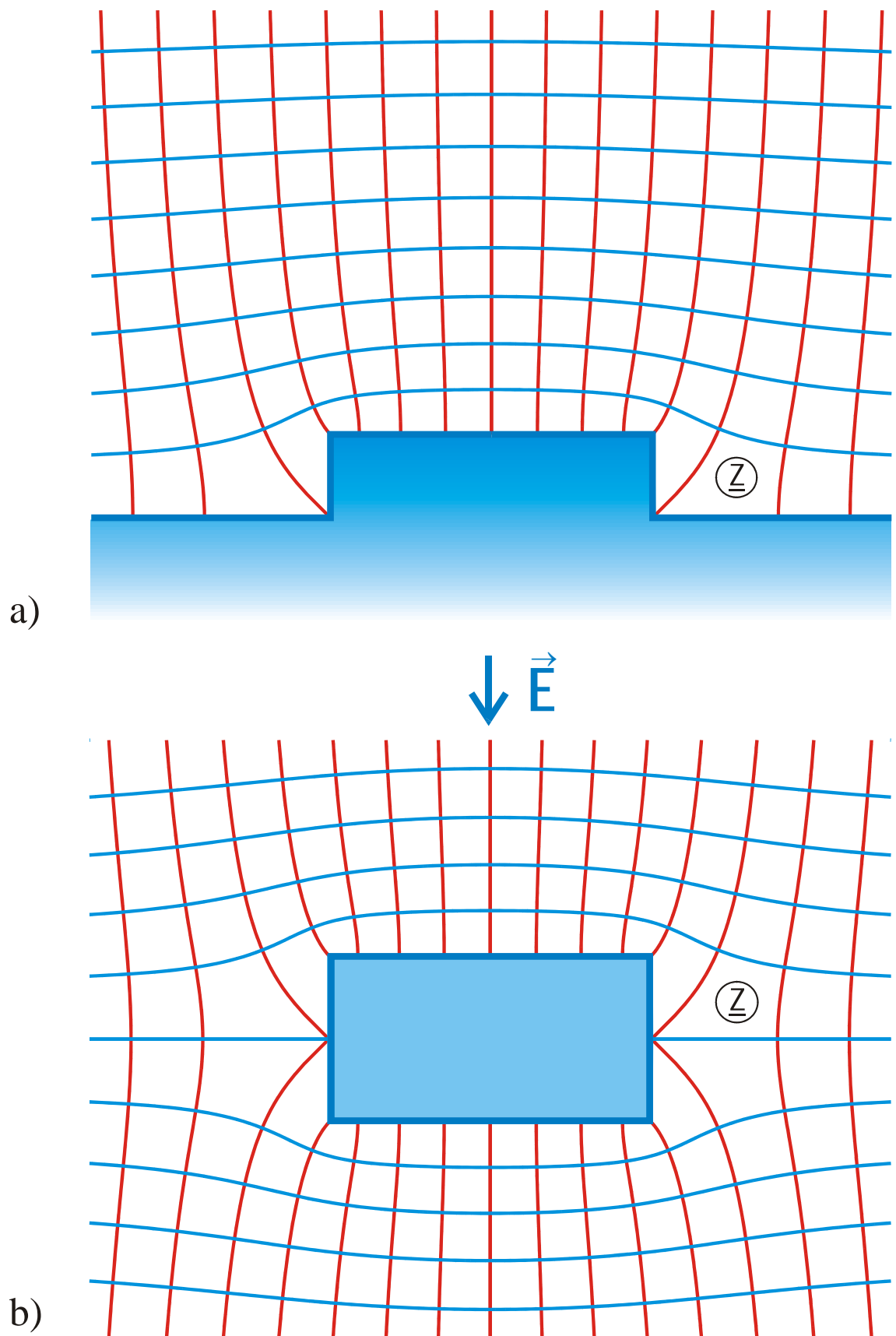


Bild 8.2: Eine unendlich ausgedehnte Elektrode a) und ein leitender Rechteckzylinder im homogenen Feld b) haben die gleiche Abbildungsfunktion (A10.2)

Beispiel 1: Zwei Blechkanten im homogenen Feld (Leitende Ebene mit Schlitz)

Das Feldbild zweier Blechkanten mit entgegengesetzt gleich großer Ladung ist durch Abb. C 3 gegeben. Entsprechend Bild 8.3a wird das homogene Feld zwischen den Platten \overline{FED} und \overline{ABC} in der w -Ebene durch die Funktion

$$\underline{z} = \cosh(\underline{w} \pi) \quad (1)$$

auf den Bereich zwischen den beiden Blechkanten abgebildet. Damit sich oberhalb dieser beiden Bleche ein homogenes Feld ergibt, wie in der z -Ebene in Bild 8.3b angedeutet, muß durch eine geeignete Vorabbildung im Punkt D eine positive Linienladung und im Punkt C eine negative Linienladung erzeugt werden. Für die w_1 -Ebene bedeutet dies, daß bei $u_1 = +\infty$, am rechten Ende des Parallelstreifens, ein Liniendipol sein muß. Außerdem müssen beide Ränder des Parallelstreifens Potentiallinien sein und sich auf dem gleichen Potential befinden. Diese Bedingungen werden durch Abb. H 1 erfüllt (Bild 8.3c):

$$\underline{w}_1 = \ln(\underline{w} \pi) \quad (2)$$

Faßt man beide Abbildungen zusammen, so ergibt sich mit

$$\cosh(\underline{w} \pi) = \frac{1}{2} [\exp(\underline{w} \pi) + \exp(-\underline{w} \pi)] \quad (3)$$

$$\underline{z} = \frac{1}{2} (\underline{w} + 1/\underline{w}) \quad (4)$$

das Feldbild eines homogenen Feldes, das durch eine leitende Ebene mit Schlitz begrenzt ist (Abb. R 4). Ändert man das Vorzeichen der Vorabbildung in Gl. (2)

$$\underline{w}_1 = -\ln(\underline{w} \pi), \quad (5)$$

so wandert der Liniendipol an das linke Ende des Parallelstreifens, in die Punkte F und A. Damit befindet sich das homogene Feld unterhalb der beiden Blechkanten. Da in diesem Beispiel die beiden Elektroden symmetrisch zur reellen Achse sind, ergibt sich das gleiche Feldbild. In den Fällen, in denen keine Symmetrie vorliegt, lassen sich auf diese Art und Weise der Bereich in dem das homogene Feld ist und der feldfreie Bereich miteinander vertauschen (z.B. bei Abb. R 4.2).

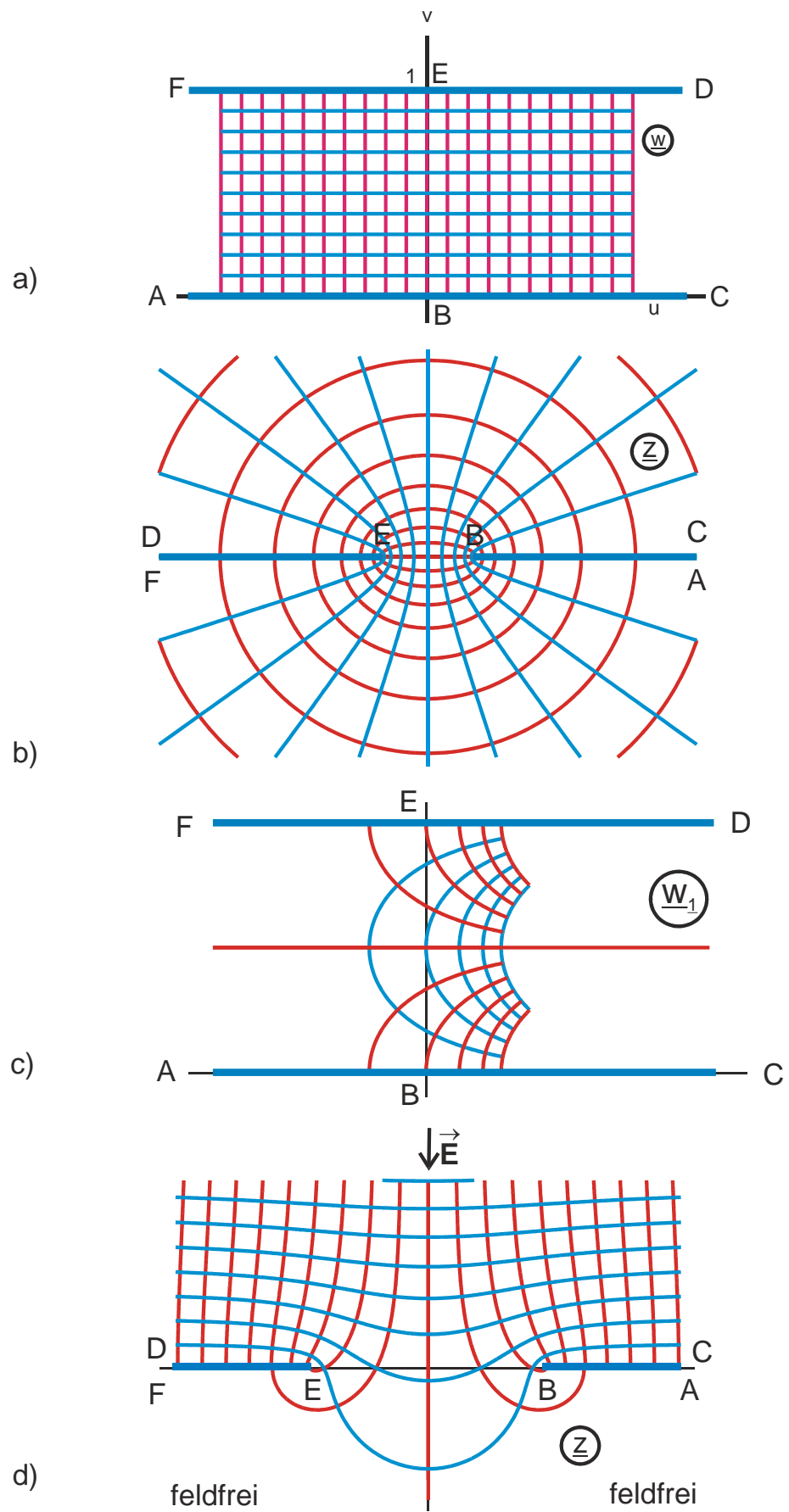


Bild 8.3: Beispiel 1

Die im obigen Beispiel vorgestellte Methode läßt sich auf alle Abbildungen der Gruppen C und D anwenden. Diese Abbildungen wurden nicht in das Abbildungsverzeichnis aufgenommen. Gruppe R enthält nur einige typische Beispiele.

8.2 Schräger Einfall des homogenen Feldes

In Beispiel 4.3 wurde das Feldbild eines leitfähigen Kreiszylinders im homogenen Feld hergeleitet aus der Überlagerung eines homogenen Feldes und eines Liniendipolfeldes. Die Überlagerung erfolgte in der Potentialebene:

$$\underline{w} = \underline{z} + 1/\underline{z}. \quad (6)$$

Damit ergab sich als Abbildungsfunktion:

$$\underline{z} = \underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1}. \quad (7)$$

Überlagert man nun in gleicher Weise das Potential eines um den Winkel φ gedrehten homogenen Feldes (s. Tabelle 3.1)

$$\underline{w}_1 = \underline{z} \cdot \exp(-j\varphi) \quad (8)$$

und das Potential eines um den Winkel φ gedrehten Liniendipols

$$\underline{w}_2 = \frac{1}{\underline{z}} \cdot \exp(j\varphi) \quad (9)$$

$$\text{zu} \quad \underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \underline{z} \cdot \exp(-j\varphi) + \frac{1}{\underline{z}} \cdot \exp(j\varphi), \quad (10)$$

so ergibt sich als Abbildungsfunktion

$$\underline{z} = e^{j\varphi} \left(\underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \right), \quad (11)$$

das Feldbild eines Kreiszylinders in einem homogenen Feld, das um den Winkel φ gegen die imaginäre Achse gedreht ist (Bild 8.4a). Das Ergebnis erscheint zunächst trivial, denn sowohl aus der Anschauung als auch aus der gewonnenen Funktion folgt, daß das Feldbild eines Kreiszylinders im homogenen Feld immer gleich aussieht, unabhängig davon, ob man die Einfallsrichtung des Feldes ändert, oder ob man, bei gleichbleibender Einfallsrichtung, den Kreiszylinder dreht.

Die abgeleitete Gleichung ist jedoch dann nützlich, wenn man bedenkt, daß es entsprechend Kapitel 7 einfach möglich ist, einen Kreiszylinder auf einen Streifen, auf ein Rechteck, auf eine Ellipse oder auf ein beliebiges Kreisbogenzweieck abzubilden. Alle diese Abbildungsaufgaben sind hiermit also gelöst (Abbildungsgruppe R3). Das folgende Beispiel zeigt die Vorgehensweise.

Beispiel 2: Streifen in schräg einfallendem, homogenem Feld

Das Feldbild eines Kreiszylinders im schräg einfallenden Feld ist (Gl. (11)):

$$\underline{w}_1 = e^{j\varphi} \left(\underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \right). \quad (12)$$

Zur Gebietsabbildung Kreis auf Streifen benötigt man die Folgeabbildung X 10

$$\underline{z} = \frac{1}{2} \left(\underline{w}_1 + 1/\underline{w}_1 \right). \quad (13)$$

Außerdem muß der Kreis den Radius 1 haben und konzentrisch zum Nullpunkt sein. Beides ist durch Gl. (12) bereits erfüllt. Die Folgeabbildung kann also ohne eine weitere Zwischenabbildung sofort angewendet werden. Damit ergibt sich in der z-Ebene das gesuchte Feldbild (Bild 8.4b).

Setzt man Gleichung (12) in Gleichung (13) ein, so ergibt sich mit

$$\frac{1}{\underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1}} = \underline{w} - \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \quad (14)$$

die Lösung

$$\underline{z} = \underline{w} \cdot \cos \varphi + j \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \cdot \sin \varphi \quad (15)$$

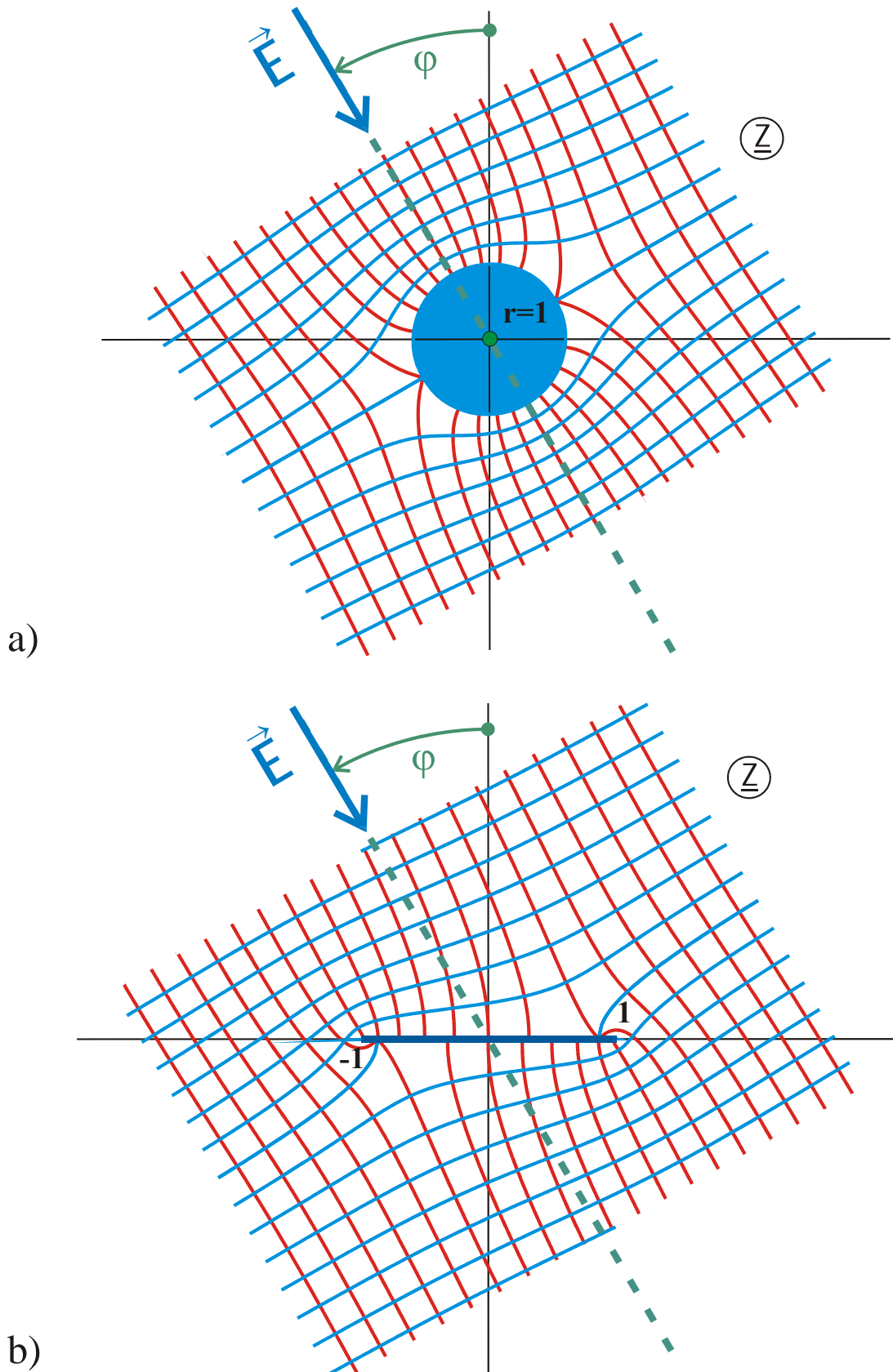


Bild 8.4: Beispiel 2, Leiterstreifen schräg zum homogenen Feld (A 3 und R 3)

8.3 Tragflügelprofile

In der Aerodynamik und Hydrodynamik lassen sich mit Hilfe der konformen Abbildung z.B. die physikalischen Größen Geschwindigkeit, Druck und Auftrieb für einen Querschnitt berechnen, der sich in einer laminaren Strömung befindet [29, 30]. Das Medium, in dem sich der zu berechnende Körper befindet, wird dabei als näherungsweise reibungsfrei und inkompressibel angenommen. Als Beispiel für Querschnitte, die sich in solchen Potentialströmungen analytisch berechnen lassen, wird im folgenden die Abbildungsfunktion für Joukowski-Profile [3] und für Kármán-Trefftz-Profile [3] aufgestellt.

Beispiel 3: Joukowski-Profil

Die Abbildung basiert auf einem Kreisbogen in einer homogenen, schräg einfallenden Strömung. Wie in Bild 8.5 skizziert, geht man dazu von einem Kreis in schräger Strömung aus

$$\underline{w}_1 = e^{j\alpha} \left(\underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \right) \quad (16)$$

und bildet diesen mit Gebietsabbildung X 14 auf einen Kreisbogen ab.

$$1. \text{ Schritt: } \underline{w}_2 = \frac{\underline{w}_1 + j \sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (17)$$

$$2. \text{ Schritt: } \underline{z} = \frac{1}{2} \left(\underline{w}_2 + 1/\underline{w}_2 \right). \quad (18)$$

Bildet man nun nicht den Einheitskreis, wie in Bild 8.6a, sondern einen etwas größeren Kreis ab, so ergibt sich in der z -Ebene ein krummlinig berandeter Bereich, der den ehemaligen Kreisbogen überdeckt. Für den Fall, daß der etwas größere Kreis in der w_2 -Ebene den Einheitskreis in einem Punkt berührt und sein Mittelpunkt nicht auf der reellen Achse liegt, heißt der sich ergebende Bereich in der z -Ebene Joukowski-Profil.

Mathematisch erzeugt man den etwas größeren Kreis durch eine zusätzliche Zwischenabbildung:

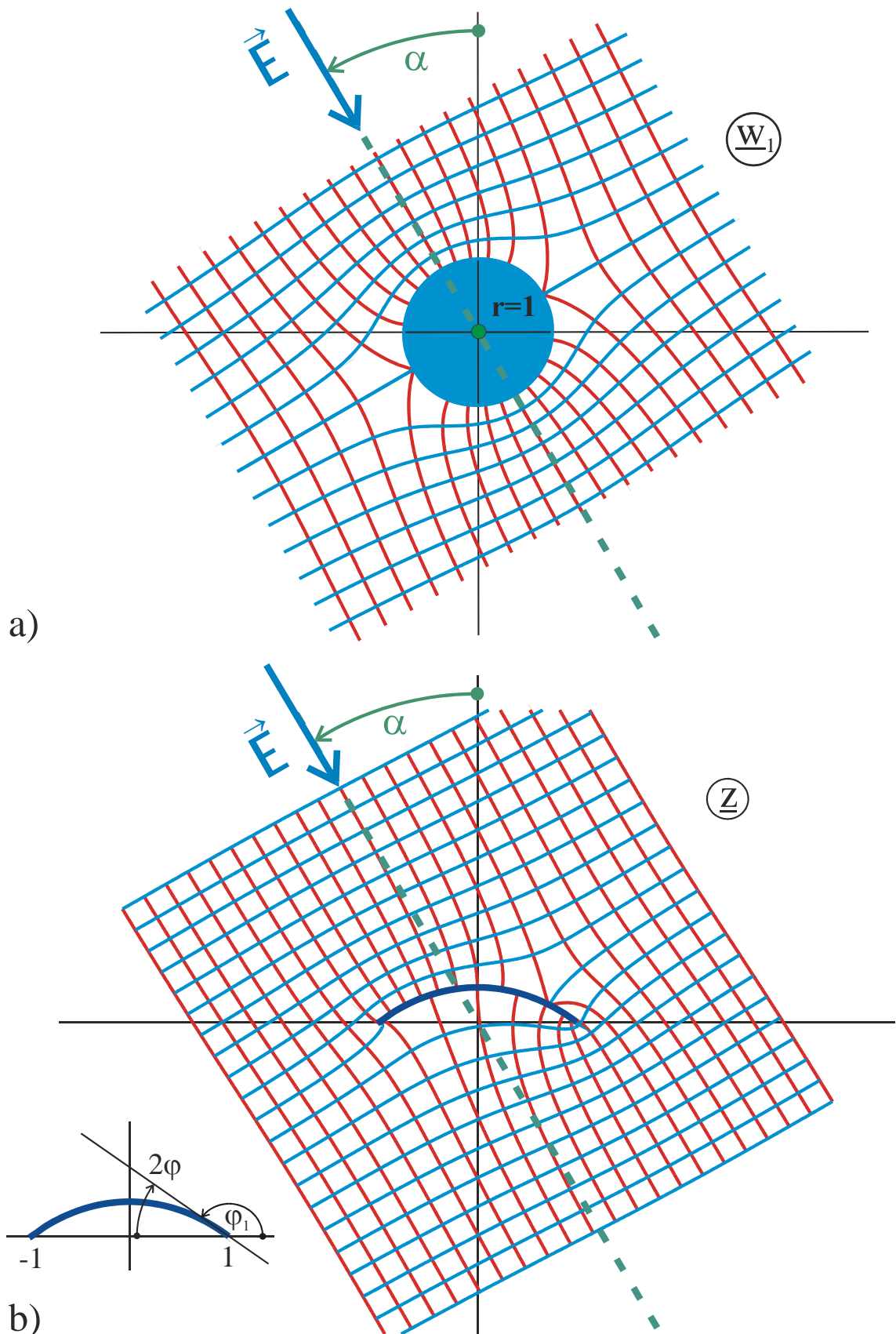


Bild 8.5: Kreisbogen in schräg einfallender Strömung (R 3.1)

Ausgangsabbildung ist wieder der schräg angeströmte Einheitskreis.

$$\underline{w}_1 = e^{j\alpha} \left(\underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \right). \quad (19)$$

Dieser wird mit dem Faktor $r > 1$ vergrößert $(r \cdot \underline{w}_1)$, an den Einheitskreis zurückgeschoben $(r \cdot \underline{w}_1 - (r-1))$, um die Strecke b vom Einheitskreis weggeschoben $(r \cdot \underline{w}_1 - (r-1) + b)$ und um den Winkel $-\beta$ gedreht (Bild 8.6b).

$$\underline{w}_2 = e^{-j\beta} [r \underline{w}_1 - (r-1) + b]. \quad (20)$$

Im Anschluß daran erfolgt die Gebietsabbildung, die den Einheitskreis (in Bild 8.6b, c schwarz eingetragen) auf einen Kreisbogen abbildet und entsprechend den größeren Kreis (rot) auf das allgemeine Tragflügelprofil.

$$1. \text{ Schritt: } \underline{w}_3 = \frac{\underline{w}_2 + j \sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (21)$$

$$2. \text{ Schritt: } \underline{z} = \frac{1}{2} (\underline{w}_3 + 1/\underline{w}_3). \quad (22)$$

Für $b = 0$ ergibt sich ein Joukowski-Profil. Es hat eine scharfe Kante am rechten Flügelende. Bild 8.8a zeigt ein Beispiel für das sich ergebende Strömungsfeld. Die Tangente an diese Kante hat den gleichen Winkel φ_1 wie die Tangente an den Kreisbogen (Bild 8.5b). Für $b = r - 1$ ergeben sich Profile, die zur imaginären Achse symmetrisch sind; für $\beta = 0$ solche, die zur reellen Achse symmetrisch sind. Durch Einstellen der Parameter r , b und β lassen sich die Profilformen gezielt variieren. Weitere Klassen von Profilen ergeben sich, indem man die Zwischenabbildung anders formuliert, z.B. so, daß die Drehung um den Winkel β nicht wie in Gl. (20) um den Nullpunkt der w_2 -Ebene erfolgt, sondern um einen beliebig vorgebbaren, anderen Punkt.

Durch Verändern von α zwischen 0 und 2π läßt sich der Winkel γ , unter dem die homogene Strömung auf das Profil einfällt, beliebig einstellen.

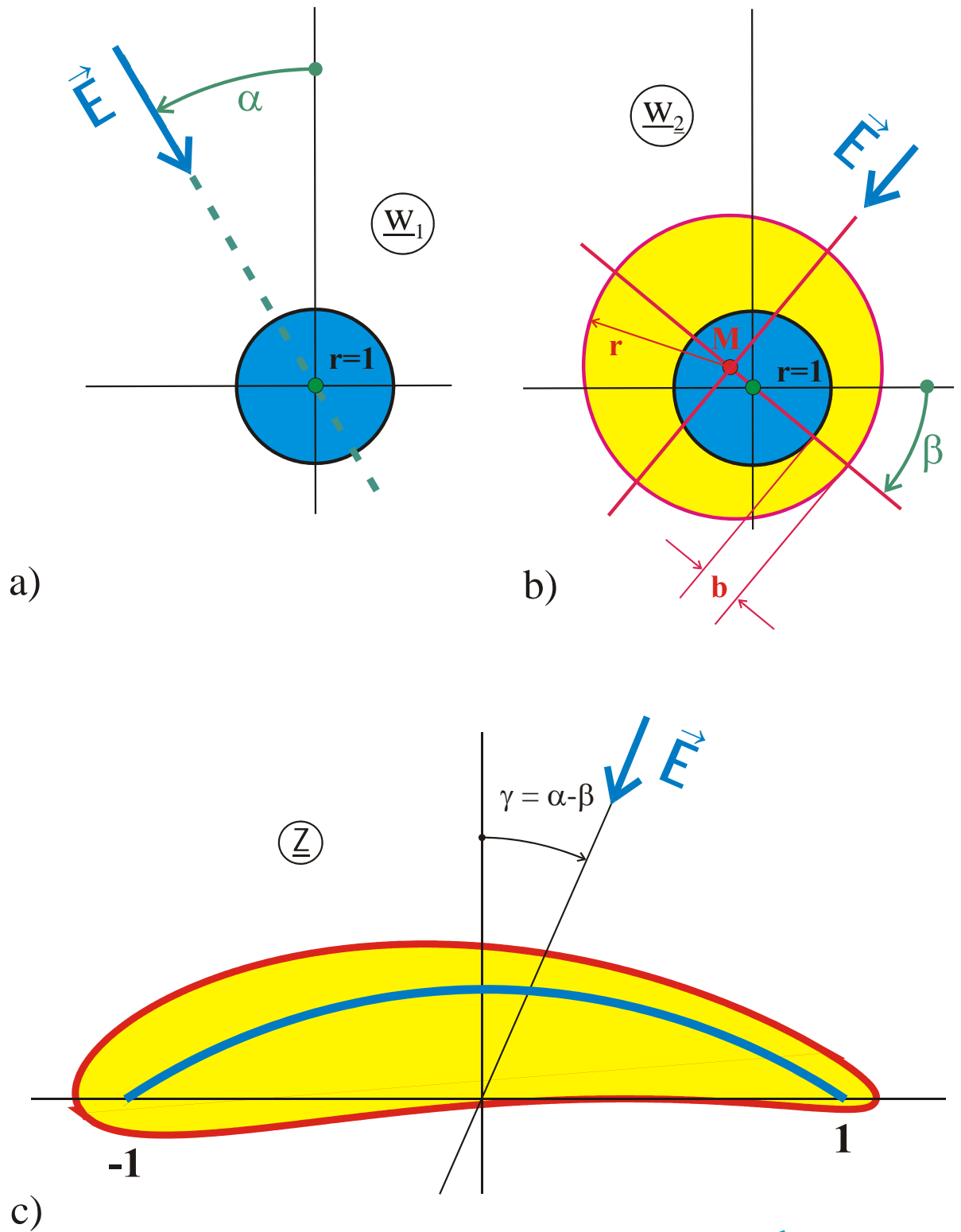


Bild 8.6: Tragflächenprofil, Beispiel 3 (R 7.1)

Beispiel 4: Kármán-Trefftz-Profile

Eine weitere Klasse von Tragflügel-Profilen ergibt sich, wenn man als Gebietsabbildung nicht die Abbildung Kreis auf Kreisbogen, sondern die Abbildung Kreis auf Kreisbogenzweieck benutzt. Für $b = 0$ heißen die sich in der z -Ebene ergebenden Querschnitte Kármán-Trefftz-Profile. Die Abbildungsfunktion lautet in diesem Fall (Bild 8.7):

$$\underline{w}_1 = e^{j\alpha} \left(\underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \right) \quad (23)$$

$$\underline{w}_2 = e^{-j\beta} \left[r \underline{w}_1 - (r-1) + b \right] \quad (24)$$

$$\underline{w}_3 = a - jb \frac{1 + \underline{w}_2}{1 - \underline{w}_2} \quad (26)$$

$$\underline{w}_4 = e^{j\delta_2} \cdot \underline{w}_3^{(2-\delta_2/\pi+\delta_1/\pi)} \quad (26)$$

$$\underline{z} = \frac{1 + \underline{w}_4}{1 - \underline{w}_4} \quad (27)$$

$$\text{mit} \quad a = \cos \varphi \quad (28)$$

$$b = \sin \varphi \quad (29)$$

$$\text{und} \quad \varphi = \frac{2\pi - \delta_2}{2 - \frac{\delta_2}{\pi} + \frac{\delta_1}{\pi}} \quad (30)$$

Bild 8.8b zeigt ein Strömungsbild eines derartigen Profils mit $b = 0,15$.

Die Profile von Beispiel 3 sind ein Sonderfall dieser Profile: Für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ geht das Kreisbogenzweieck in einen Kreisbogen über.

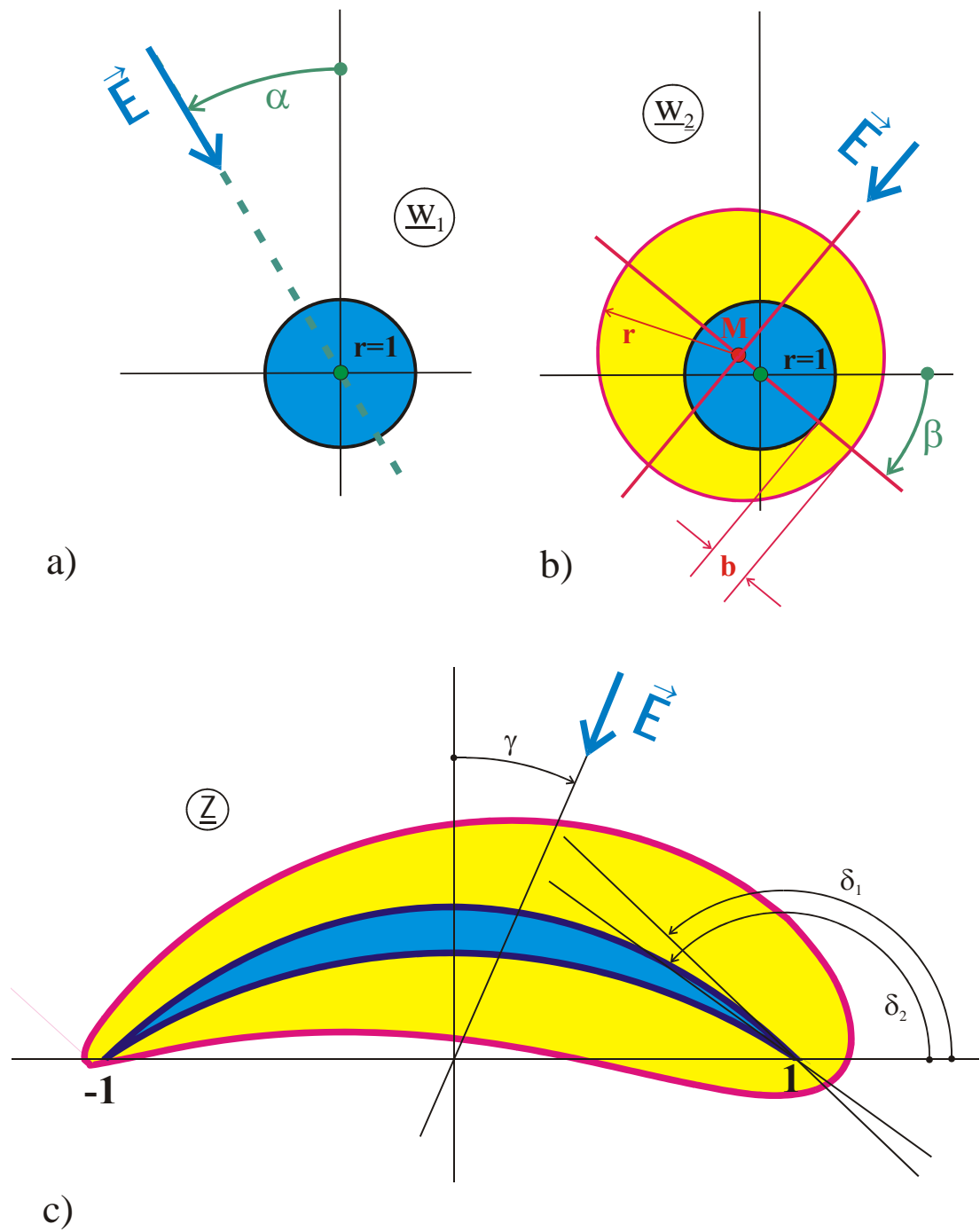


Bild 8.7: Tragflächenprofil, Beispiel 4 (R 7.2)

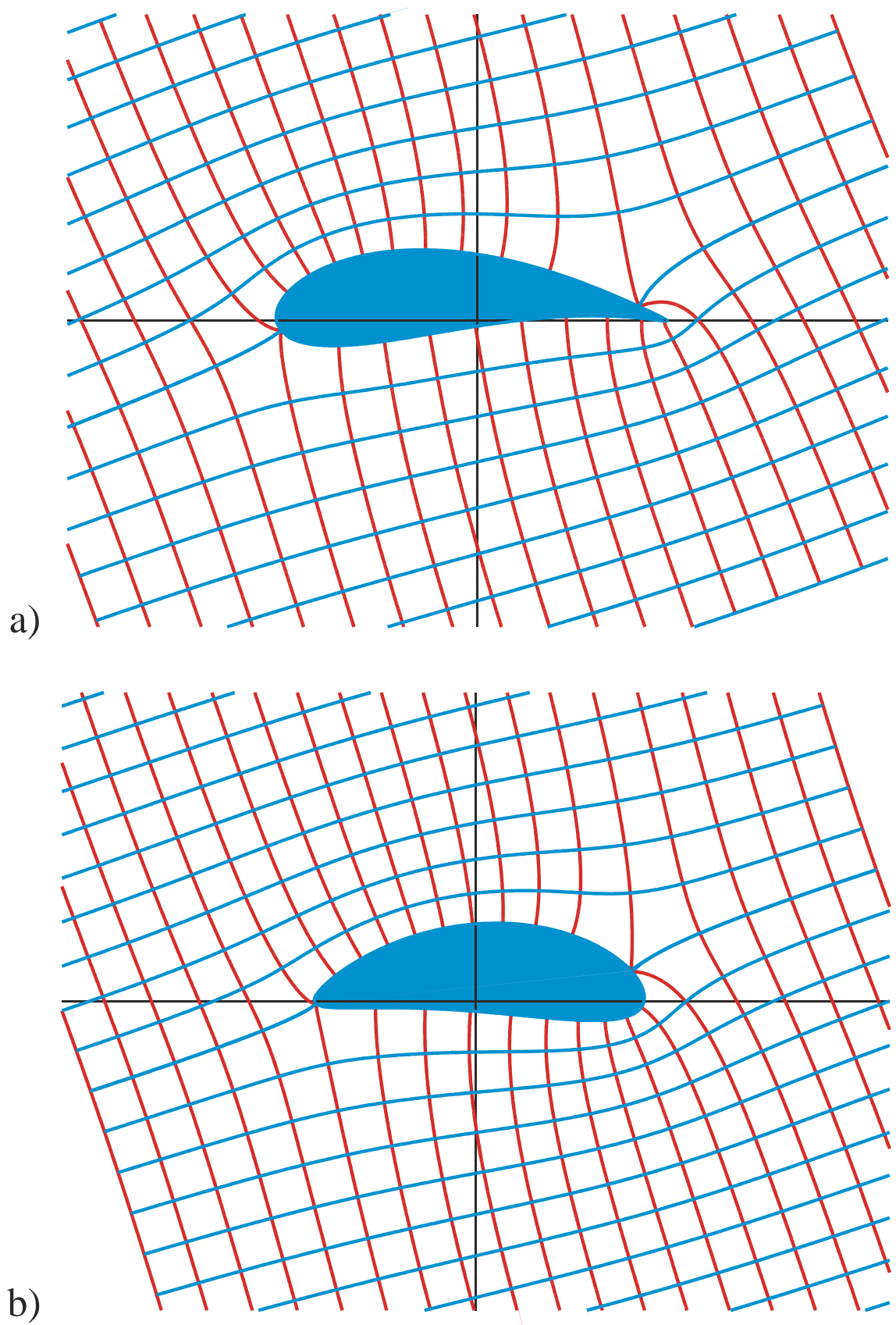


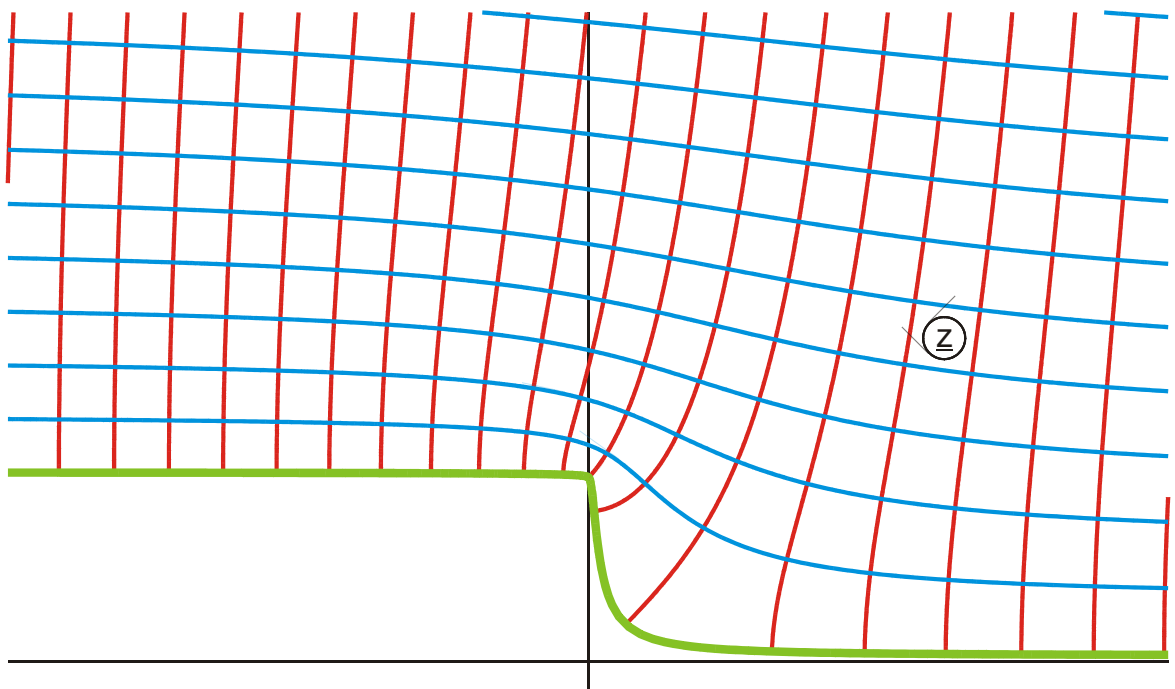
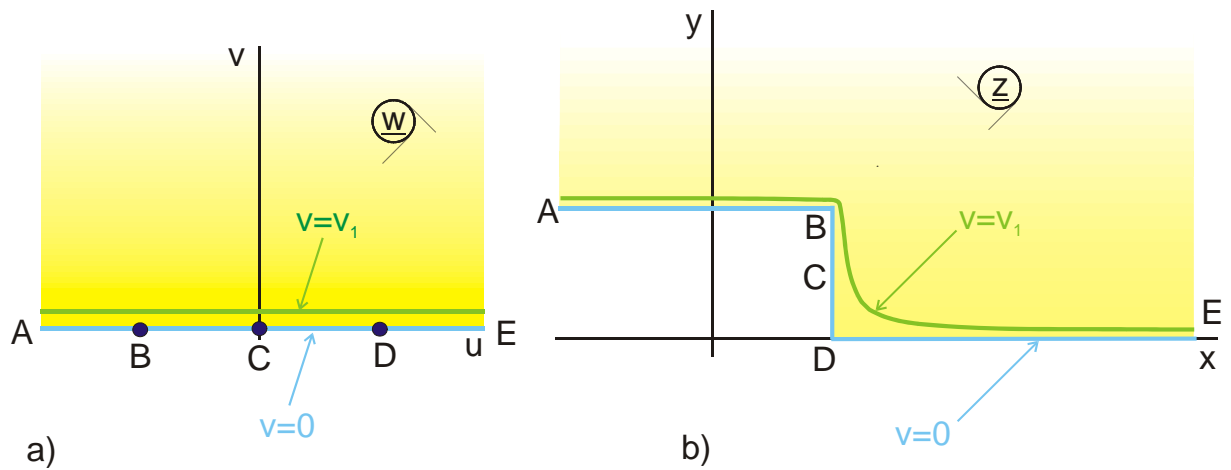
Bild 8.8: a) Strömungsbild eines Joukowski-Profiles (R 7)

b) Strömungsbild eines Profils von Beispiel 4 mit $b = 0,15$ (R 7.2)

9. Abrunden von Ecken

9.1 Benachbarte Potentiallinie

Ein einfaches Verfahren zum Abrunden der Ecken einer gegebenen Abbildung mit eckiger Berandung ist in Bild 1 skizziert. Anstelle der Randlinie $v = 0$ benutzt man eine etwas weiter innen im felderfüllten Bereich liegende Randlinie $v = v_1$. Dieses Verfahren wurde bereits in Beispiel 8.3, bei der Tragflügelabbildung, benutzt. Dort hatte sich der Einheitskreis auf ein Kreisbogenzweieck abgebildet und ein etwas größerer Kreis, der den Einheitskreis in keinem Punkt berührt, auf das Tragflügelprofil, ohne jegliche Ecken. Wie in Bild 9.1 angedeutet, verändert bei dieser Art der Eckenabrundung die gesamte Berandung ihre Lage. Außerdem ist die Auswirkung bei einspringenden Ecken bzw. Innenecken (Punkt D) wesentlich stärker als bei Außenecken (Punkt B). Technisch interessant ist in der Regel jedoch das Abrunden von Außenecken, da dort z.B. im Fall des elektrostatischen Feldes im mathematischen Modell die elektrische Feldstärke unendlich groß wird.



c) $v_1 = 0,1$

Bild 9.1: Eckenabrunden durch Weglassen der äußeren Potentiallinie $v = 0$ und Benutzen einer dicht benachbarten Potentiallinie $v = v_1$ als neuer Berandung (A 6)

9.2 Abrunden von Ecken durch Überlagerung von beziehungsweise voneinander abweichenden Rändern

Addiert man zu einem Feldbild $f_1(\underline{w})$ dessen Randlinie mit zunehmendem \underline{w} , z.B. vertikal verläuft ein zweites Feldbild $f_2(\underline{w})$, dessen Randlinie mit zunehmendem \underline{w} dazu orthogonal, also in diesem Fall horizontal verläuft, so ergibt sich im Feldbild der Funktion

$$f(\underline{w}) = f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w}) \quad (1)$$

im allgemeinen Fall eine gekrümmte Kurve als neue Randlinie (Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht der Addition zweier Vektoren in der Ebene).

Beispiel 1: Leitende Ebene mit halbkreisförmiger Ausbuchtung
(Leitender Kreiszylinder im homogenen Feld).

Entsprechend Bild 9.2a läuft die Randlinie der Funktion

$$f_1(\underline{w}) = \sqrt{\underline{w}^2 - 1} \quad (2)$$

von A nach B in vertikaler Richtung, wenn u in der w -Ebene von 0 nach 1 läuft. Die Randlinie ($v = 0$) der Funktion

$$f_2(\underline{w}) = \underline{w} \quad (3)$$

läuft entsprechend Bild 9.2b mit zunehmendem u in horizontaler Richtung. Bildet man die Summe

$$f(\underline{w}) = f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w}) = \underline{w} + \sqrt{\underline{w}^2 - 1}, \quad (4)$$

so ergibt sich jeder Punkt der neuen Randkurve, wie in Bild 9.2c angedeutet, als Summe der beiden komplexen Zahlen $f_1(\underline{w})$ und $f_2(\underline{w})$. Der Anfangspunkt A liegt bei $j + 0 = j$, der Endpunkt B liegt bei $0 + 1 = 1$ und die Punkte dazwischen ergeben eine nach rechts gekrümmte Linie. Wie man leicht nachrechnen kann, ist die gekrümmte Linie in diesem Fall ein exakter Kreisbogen mit $x^2 + y^2 = 1$. Im Bereich zwischen Punkt B und Punkt C verlaufen beide Randlinien vertikal, mit zunehmendem u nach rechts gerichtet. Insofern ergibt die Überlagerung dort die gleiche Kurve.

Durch die Überlagerung zweier Feldbilder, deren Berandungen bereichsweise (zwischen A und B) orthogonal zueinander verlaufen und deren Berandungen außerhalb dieses Bereichs (zwischen B und C) gleichgerichtet verlaufen, wird in diesem Beispiel erreicht, daß eine in die obere Halbebene hineinragende scharfe Schneide ($f_1(\underline{w})$, A 2.1) in einen Halbkreis (A 3) umgewandelt wird. Dieses Verfahren läßt sich gezielt einsetzen, um gegebene Feldbilder mit eckigen Randkurven in Feldbilder mit abgerundeten Randkurven umzuwandeln.

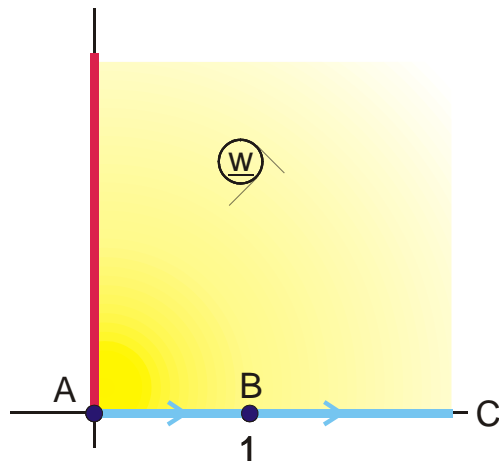
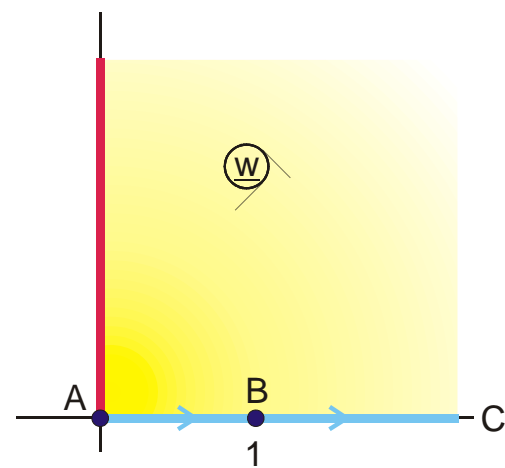
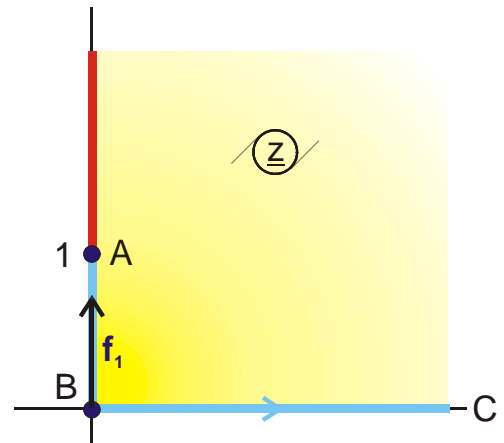
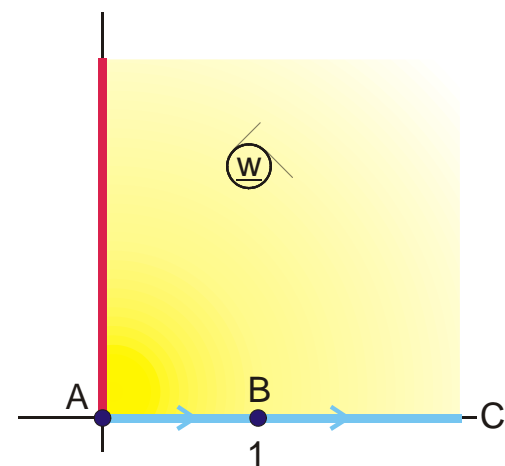
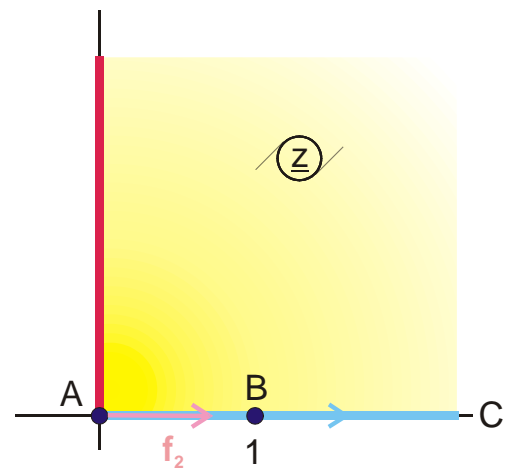
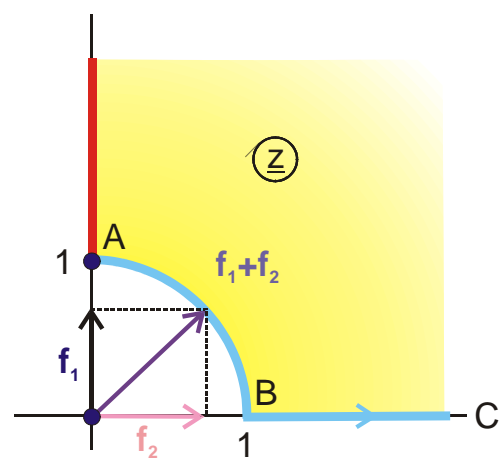
a) $f_1(w)$ b) $f_2(w)$ c) $f_1(w) + f_2(w)$ 

Bild 9.2: Beispiel 1, Herleitung von Abbildung A 3

Beispiel 2: Abgerundetes Rechteck

Bild 9.3a zeigt als Randkontur ein Rechteck. Addiert man hierzu eine Randkontur, die im gesamten Bereich von A über B nach C vertikal verläuft, so ergibt die Summenkurve zwischen A und B eine gekrümmte Linie und zwischen B und C eine vertikale Gerade.

$$\text{Rechteck:} \quad f_1(\underline{w}) = B_a \left(\frac{\sin(\underline{w}\pi)}{k}, k \right) + jb \quad (5)$$

$$\text{vertikaler Streifen:} \quad f_2(\underline{w}) = j\sigma \cdot \cos(\underline{w}\pi) \quad (6)$$

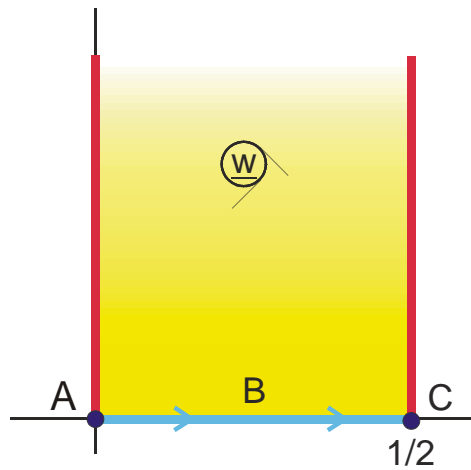
$$\text{Summe:} \quad \underline{z} = B_a \left(\frac{\sin(\underline{w}\pi)}{k}, k \right) + jb + j\sigma \cdot \cos(\underline{w}\pi). \quad (7)$$

Im Punkt A ergibt sich eine horizontale Tangente. Im Punkt B hat die Randkontur einen Knick. Der Punkt B liegt bei $u_B = \frac{1}{\pi} \arcsin k$. dort hat $f_1(\underline{w})$ den Wert $a + jb$ und $f_2(\underline{w})$ den Wert $j\sigma \sqrt{1-k^2} = j\sigma k'$. Damit liegt Punkt B der Summenfunktion bei $j(b + \sigma k')$. Die Abrundung wird kreisähnlich für

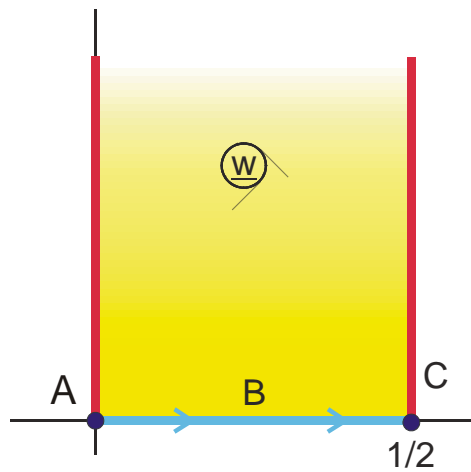
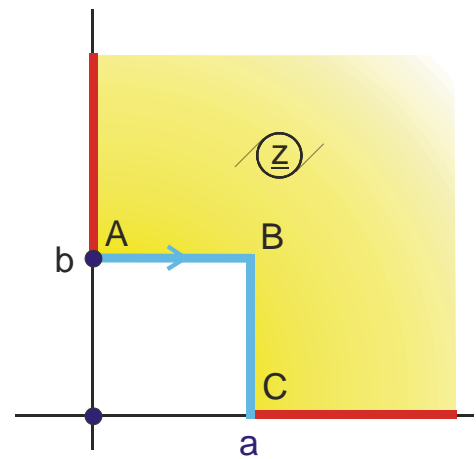
$$\sigma(1-k') = a, \quad (8)$$

wie man unmittelbar der Abbildung 3c entnehmen kann. Weitere Beispiele für das Abrunden einer Seite eines Rechtecks bzw. eines Halbstreifens nach dem gleichen Verfahren sind die Abb. M 1, M 1.1 und M 3.

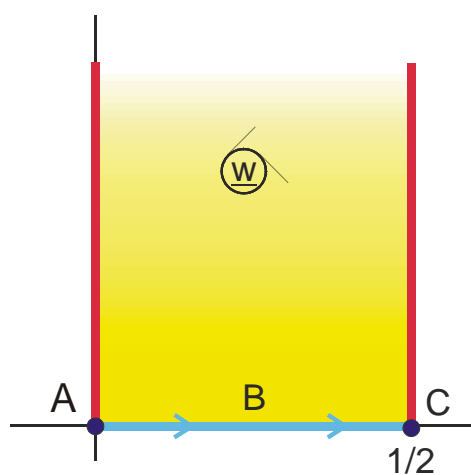
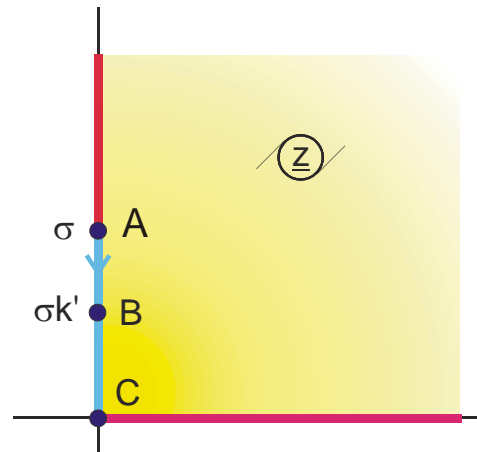
Anstatt, wie im vorangegangenen Beispiel, zwei unterschiedliche Feldbilder zu überlagern, kann man auch zwei gleiche Feldbilder überlagern. Feldbild 1 unterscheidet sich dabei von Feldbild 2 dadurch, daß die abzurundende Außenecke in der w -Ebene etwas versetzt ist.



a) Rechteck



b) vertikaler Streifen



c) Summe: Abb. M1.2

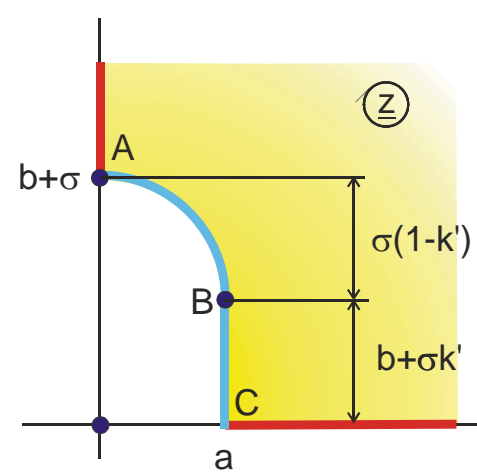


Bild 9.3: Beispiel 2

Beispiel 3: Abgerundete Außenecke

Der einfachste Fall für die Anwendung dieses Verfahrens ist die einzelne Ecke

$$\underline{z} = \underline{w}^{\varphi/\pi}. \quad (9)$$

Der Knickpunkt liegt in der w -Ebene bei $\underline{w} = 0$. Verschiebt man nun für $f_1(\underline{w})$ diesen Punkt nach $\underline{w} = +a$ und für $f_2(\underline{w})$ nach $\underline{w} = -a$

$$f_1(\underline{w}) = (\underline{w} - a)^{\varphi/\pi} \quad (10)$$

$$f_2(\underline{w}) = (\underline{w} + a)^{\varphi/\pi}, \quad (11)$$

so ergibt sich bei der Addition beider Funktionen im Bereich zwischen Punkt B und Punkt C in Bild 9.4c die Überlagerung einer vertikalen Randkurve (Funktion $f_1(\underline{w})$) und einer horizontalen Randkurve (Funktion $f_2(\underline{w})$). Das Ergebnis ist eine abgerundete Ecke.

$$f(\underline{w}) = f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w}) \quad (12)$$

Durch Einsetzen erhält man die Lage des Punktes C zu

$$b = (2a)^{\varphi/\pi}. \quad (13)$$

Weitere Beispiele für die Anwendung dieses Verfahrens sind die Abb. M 2 und M 2.1. In Bild 9.5 ist das Grundprinzip dieses Verfahrens dargestellt. Beide Abbildungen $f_1(\underline{w})$ und $f_2(\underline{w})$ erzeugen die gleiche Randkurve mit Ecken. Die abzurundende Außenecke, in Bild 9.5 bei Punkt D, ist bei $f_1(\underline{w})$ etwas gegen $f_2(\underline{w})$ versetzt. Alle anderen Eckpunkte liegen in der w -Ebene an den gleichen Stellen. Die Addition beider Feldbilder ergibt dann eine im Punkt D abgerundete Ecke. Die Kurvenform und die Ausdehnung der Abrundung kann durch die Wahl des Abstands Δu zwischen den beiden Punkten beeinflusst werden. Weiterhin kann man die Kurvenform durch wiederholte Anwendung des Verfahrens, d.h. mehrfache, gewichtete Überlagerung beeinflussen.

$$f(\underline{w}) = f_1(\underline{w}) + g_2 \cdot f_2(\underline{w}) + g_3 \cdot f_3(\underline{w}) + \dots \quad (14)$$

Durch die Überlagerung von Feldbildern lassen sich auch abgerundete Innenecken erzeugen.

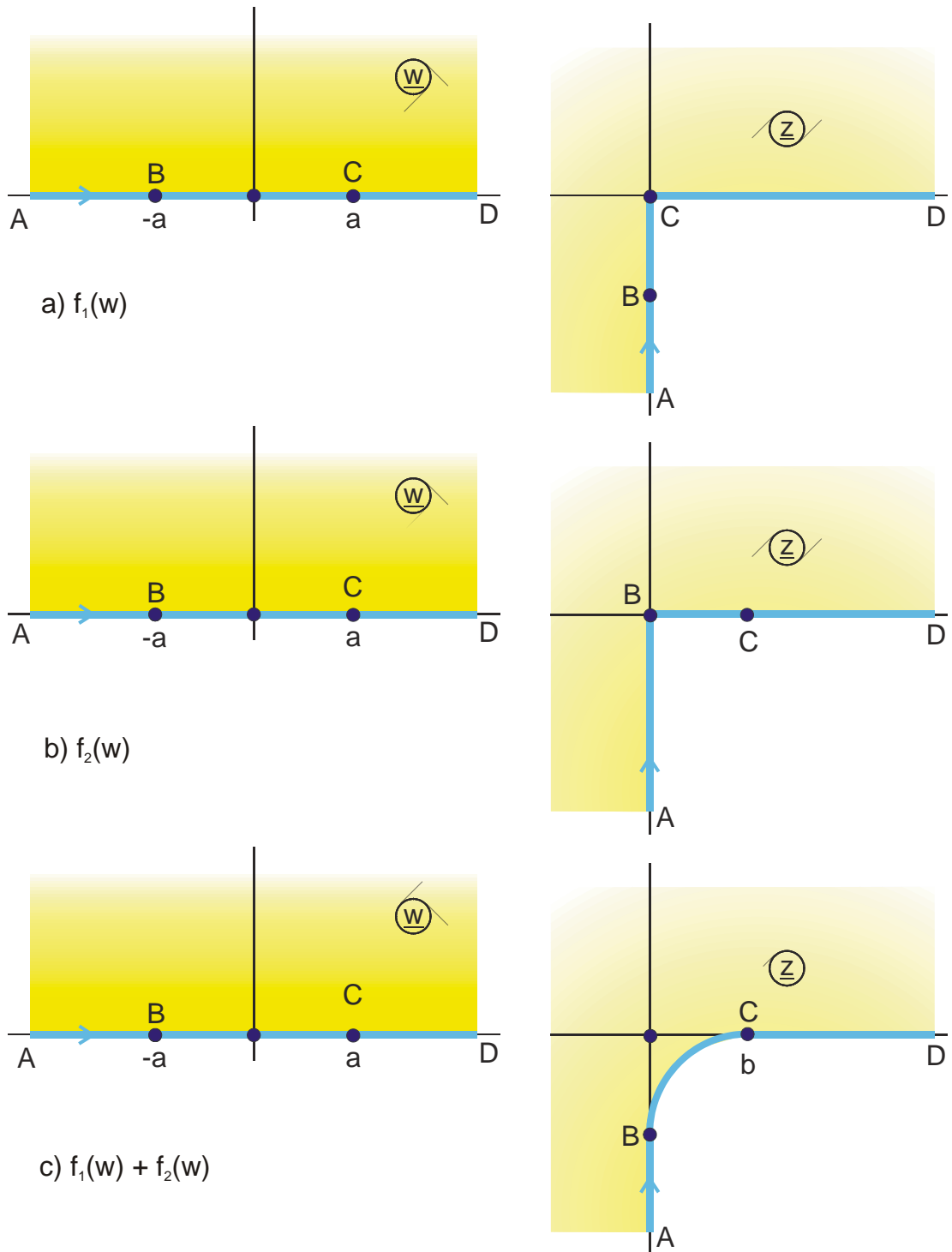


Bild 9.4: Beispiel 3

Beispiel 4: Abgerundete Innenecke

Analog zu Beispiel 3 wird die Funktion

$$f_1(\underline{w}) = (\underline{w} + a)^{1+\varphi/\pi} \quad (15)$$

und die Funktion

$$f_2(\underline{w}) = -(\underline{w} - a)^{1+\varphi/\pi} \quad (16)$$

überlagert zur Funktion

$$f(\underline{w}) = f_1(\underline{w}) + f_2(\underline{w}) = (\underline{w} + a)^{1+\varphi/\pi} - (\underline{w} - a)^{1+\varphi/\pi} \quad (17)$$

Entlang der Geraden \overline{AB} und \overline{CD} sind die zu überlagernden Ränder gegenläufig (Bild 9.5). Die Funktion mit dem jeweils betragsmäßig größeren Argument dominiert. Das Ergebnis ist wiederum eine Gerade. Zwischen den Punkten B und C verlaufen die Teilfunktionen in verschiedene Richtungen und das Ergebnis ist eine gekrümmte Kurve, die Abrundung der Innenecke.

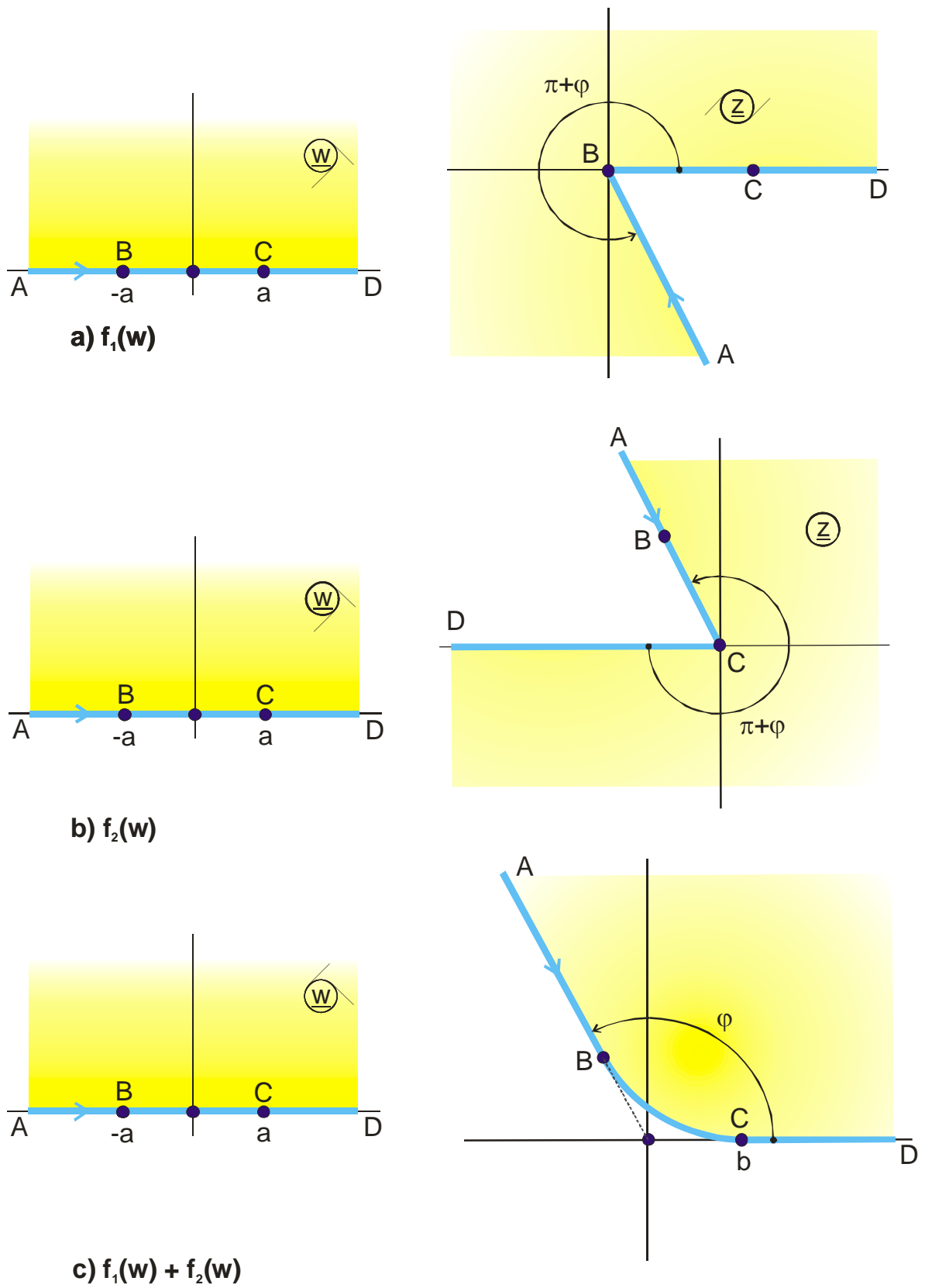


Bild 9.5: Beispiel 4, abgerundete Innenecke, (Abb. M 2.3)

9.3 Abrunden von Außenecken mit der Schwarz-Christoffel-Transformation

Im vorangegangenen Abschnitt wurde ein Verfahren zum Abrunden von Außenecken vorgestellt, bei dem zwei Abbildungsfunktionen addiert werden. Die abzurundende Ecke liegt bei jeder dieser Abbildungsfunktionen in der w -Ebene jeweils an einer anderen Stelle der reellen Achse (Bild 9.5). Jede Abbildungsfunktion ergibt für sich allein eine Außenecke im Punkt D . Die Summe beider Funktionen ergibt eine abgerundete Außenecke, wobei die nicht näher mathematisch fixierbare, gekrümmte Kurve bei D_1 beginnt und bei D_2 endet.

In der Schwarz-Christoffelschen Formel, Gl. (4.15), entspricht eine Außenecke dem Term

$$\frac{1}{(\underline{w} - u_i)^{\alpha_i / \pi}} \quad (18)$$

mit $\alpha_i < 0$. Für $i = D$ entsprechend Bild 9.5 ergibt sich

$$\frac{1}{(\underline{w} - u_D)^{\alpha_D / \pi}} \quad (19)$$

Die beiden zu addierenden Funktionen ergeben sich damit aus der Schwarz-Christoffelschen Formel mit dem Term

$$\frac{1}{(\underline{w} - u_{D1})^{\alpha_D / \pi}} \quad \text{für } f_1(\underline{w}) \quad (20)$$

und
$$\frac{1}{(\underline{w} - u_{D2})^{\alpha_D / \pi}} \quad \text{für } f_2(\underline{w}) \quad (21)$$

Die Bogenlänge der Abrundung läßt sich einstellen mit der Entfernung Δu zwischen u_{D1} und u_{D2} . Der Verlauf der Kurve ist weiterhin beeinflußbar durch den Gewichtungsfaktor g_2 bei der Addition.

$$f(\underline{w}) = f_1(\underline{w}) + g_2 \cdot f_2(\underline{w}) \quad (22)$$

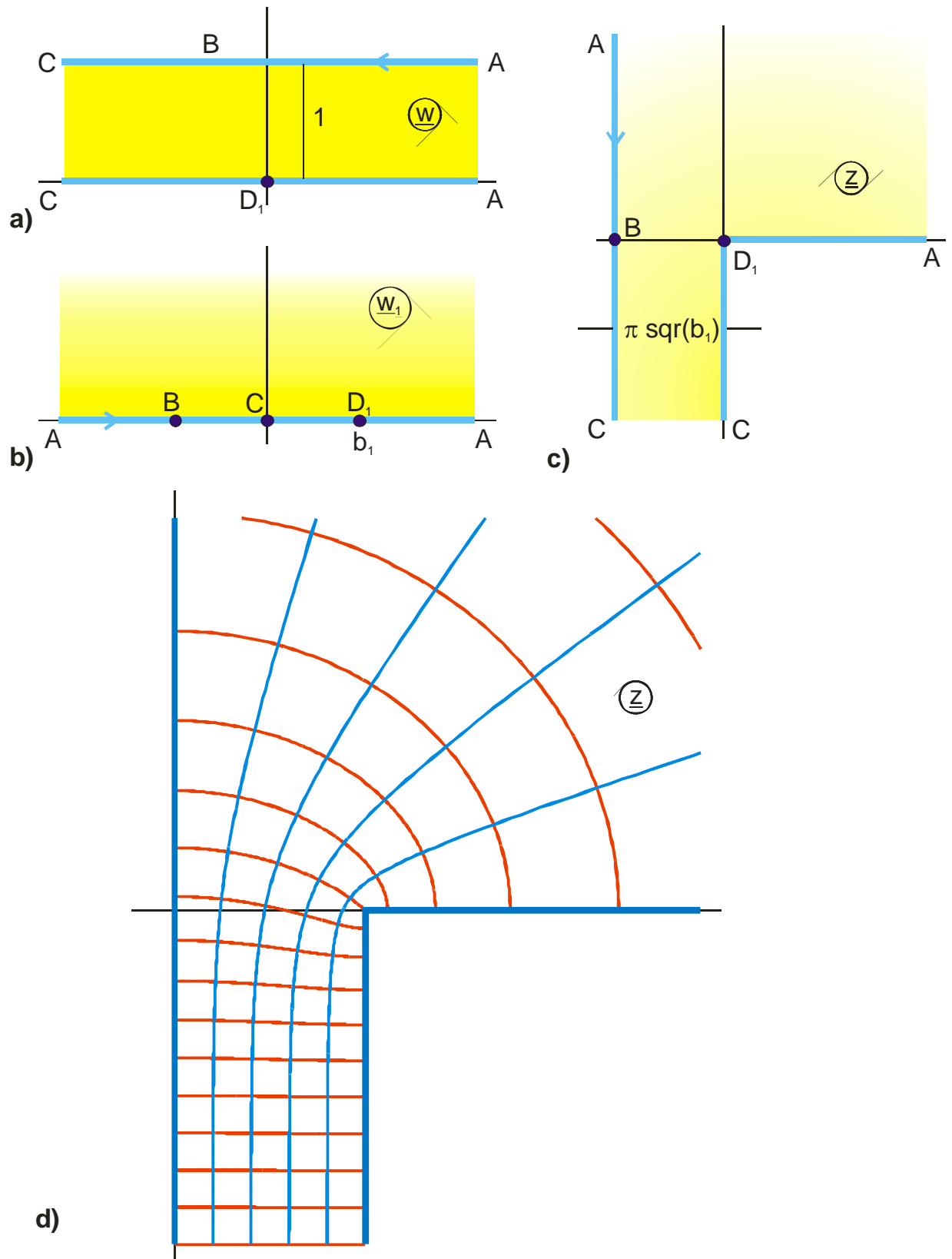


Bild 9.7: Abbildung C 1 für Beispiel 5

Um im Punkt D_1 eine abgerundete Ecke zu erhalten, wird zu dieser Funktion

$$f_1(\underline{w}_1) = 2\sqrt{\underline{w}_1 - b_1} - 2\sqrt{b_1} \cdot \arctan \sqrt{\frac{\underline{w}_1 - b_1}{b_1}} \quad (26)$$

die Funktion

$$f_2(\underline{w}_1) = 2\sqrt{\underline{w}_1 - b_2} - 2\sqrt{b_2} \cdot \arctan \sqrt{\frac{\underline{w}_1 - b_2}{b_2}}, \quad (27)$$

multipliziert mit dem Gewichtungsfaktor λ , addiert.

$$f(\underline{w}_1) = f_1(\underline{w}_1) + \lambda \cdot f_2(\underline{w}_1). \quad (28)$$

Die Funktion $f_1(\underline{w}_1)$ hat eine Außenecke bei D_1 ; $f_2(\underline{w}_1)$ hat eine Außenecke bei D_2 .

Für $\Delta u_1 \neq 0$, mit

$$\Delta u_1 = |b_1 - b_2|, \quad (29)$$

ergibt die gewichtete Addition beider Funktionen eine abgerundete Ecke. Je kleiner Δu_1 , desto kleiner der Krümmungsradius. Für $b_1 = b_2$ ergibt sich die ursprüngliche, scharfkantige Ecke. Für $b_1 = 1 - \Delta u_1/2$ und $b_2 = 1 + \Delta u_1/2$ läßt sich D_1 mit $\lambda > 1$ in der z -Ebene nach unten verschieben. Mit $\lambda < 1$ wird D_2 nach rechts verschoben.

Um die Abbildung auf die Breite 1 zu normieren und Punkt B in den Nullpunkt der z -Ebene zu verschieben (Bild 9.8) wird Gl. (28) umgewandelt in

$$f(\underline{w}_1) = \frac{1}{\pi(\sqrt{b_1} + \lambda\sqrt{b_2})} \{f_1(\underline{w}_1) + \lambda \cdot f_2(\underline{w}_1)\} + 1. \quad (30)$$

Abb. M 4.1 ist ein weiteres Beispiel für dieses Verfahren zur Abrundung einer Außenecke.

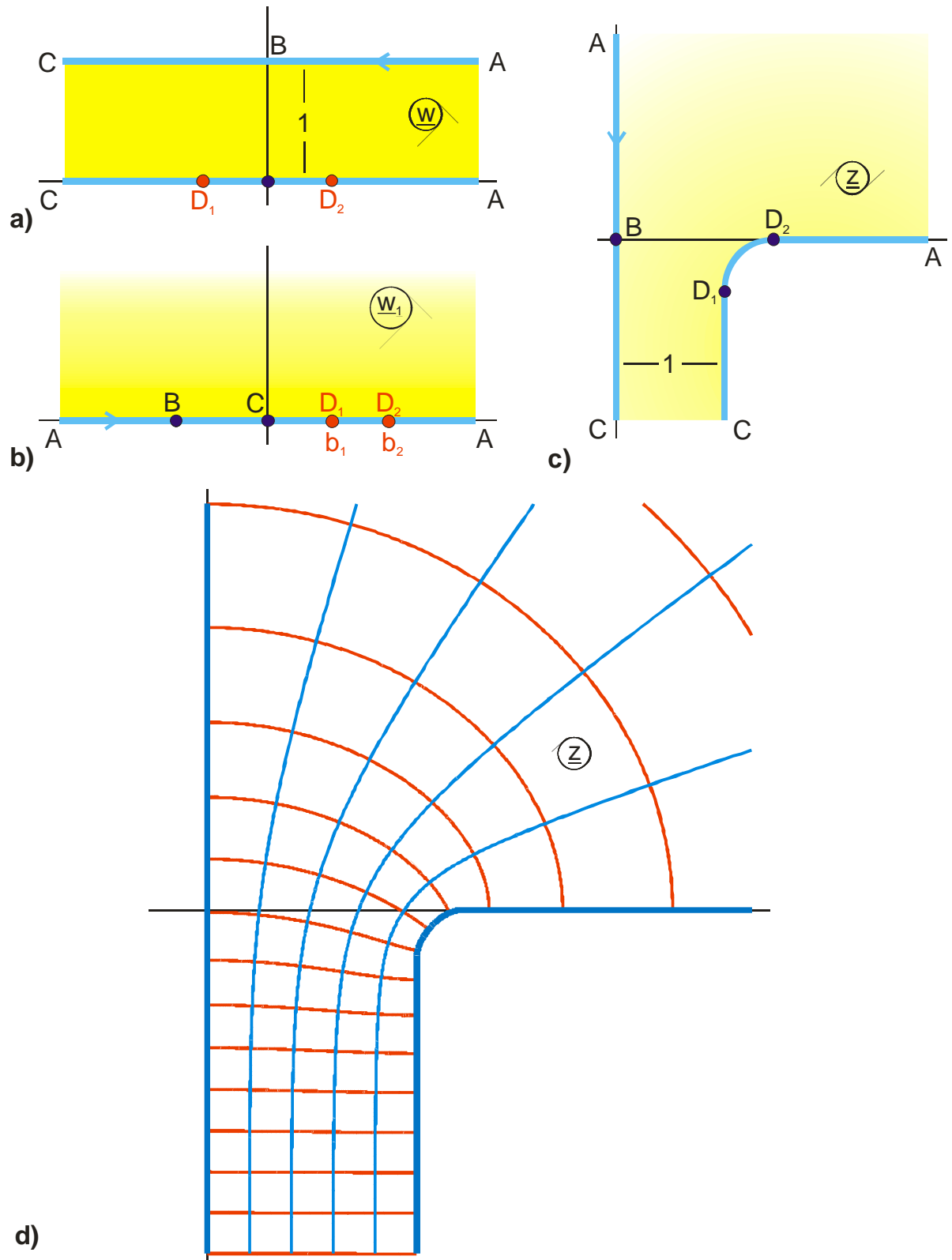


Bild 9.8: Beispiel 5, Abb. M 4

9.4 Abrunden von Innenecken

In Kapitel 9.1. wurde gesagt, daß eine einfache Eckenabrundung möglich ist, wenn man anstelle der geknickten Randlinie eine etwas weiter innen liegende Potentiallinie als neue Randlinie benutzt. Dieses Verfahren läßt sich verbessern, indem man nur in unmittelbarer Nähe der abzurundenden Ecke in das Innengebiet ausweicht. Wie in Bild 9.9b dargestellt, wird so die auf der reellen Achse im Punkt D liegende Ecke umgangen. In der z -Ebene ergibt sich dann ausschließlich zwischen D_1 und D_2 eine gekrümmte Berandung. Der restliche Rand bleibt unverändert erhalten. Das Aussparen der Ecke D wird durch eine Vorabbildung erreicht.

Beispiel 6: M 5, Abrunden der Innenecke von Abb. A 6

Eine dafür geeignete Vorabbildung ist z.B. Abb. A 3.11 [15]:

$$\underline{w}_1 = \underline{w} - \frac{h}{a^2} \left\{ \left[(\underline{w} - b_1)(\underline{w} - b_2) \right]^{3/2} - (\underline{w} - b_1)(\underline{w} - b_2)(\underline{w} - b) \right\} \quad (31)$$

$$\text{mit } a = (b_2 - b_1)/2. \quad (32)$$

Die Parameter b_1 und b_2 legen die Länge des abgerundeten Bereichs fest. Mit h wird der Grad der Abrundung beeinflußt. Je größer h gewählt wird, desto größer ist die Höhe c des in der w_1 -Ebene ausgesparten Bereichs ($c = h a$). Bei D_1 und D_2 hat die Berandung in der w_1 -Ebene eine horizontale Tangente.

Will man nun die Innenecke von Abb. A 6 abrunden, so liegt b bei 1 und das Feldbild in der z -Ebene ergibt sich zu

$$\underline{z} = \sqrt{\underline{w}_1^2 - 1} + \ln \left(\underline{w}_1 + \sqrt{\underline{w}_1^2 - 1} \right). \quad (33)$$

Da die Vorabbildung Gl. (31) nur den Bereich zwischen D_1 und D_2 verändert, kann sie mehrfach hintereinander angewendet werden. Auf diese Art und Weise läßt sich nacheinander jede Innenecke, die abgerundet werden soll, individuell und unabhängig von den anderen bearbeiten.

Das Verfahren ist **grundsätzlich** auch auf Außenecken anwendbar. Allerdings ergibt sich dabei, wie in Bild 9.9c gestrichelt für den Punkt B angedeutet, eine Verdickung der Außenecke.

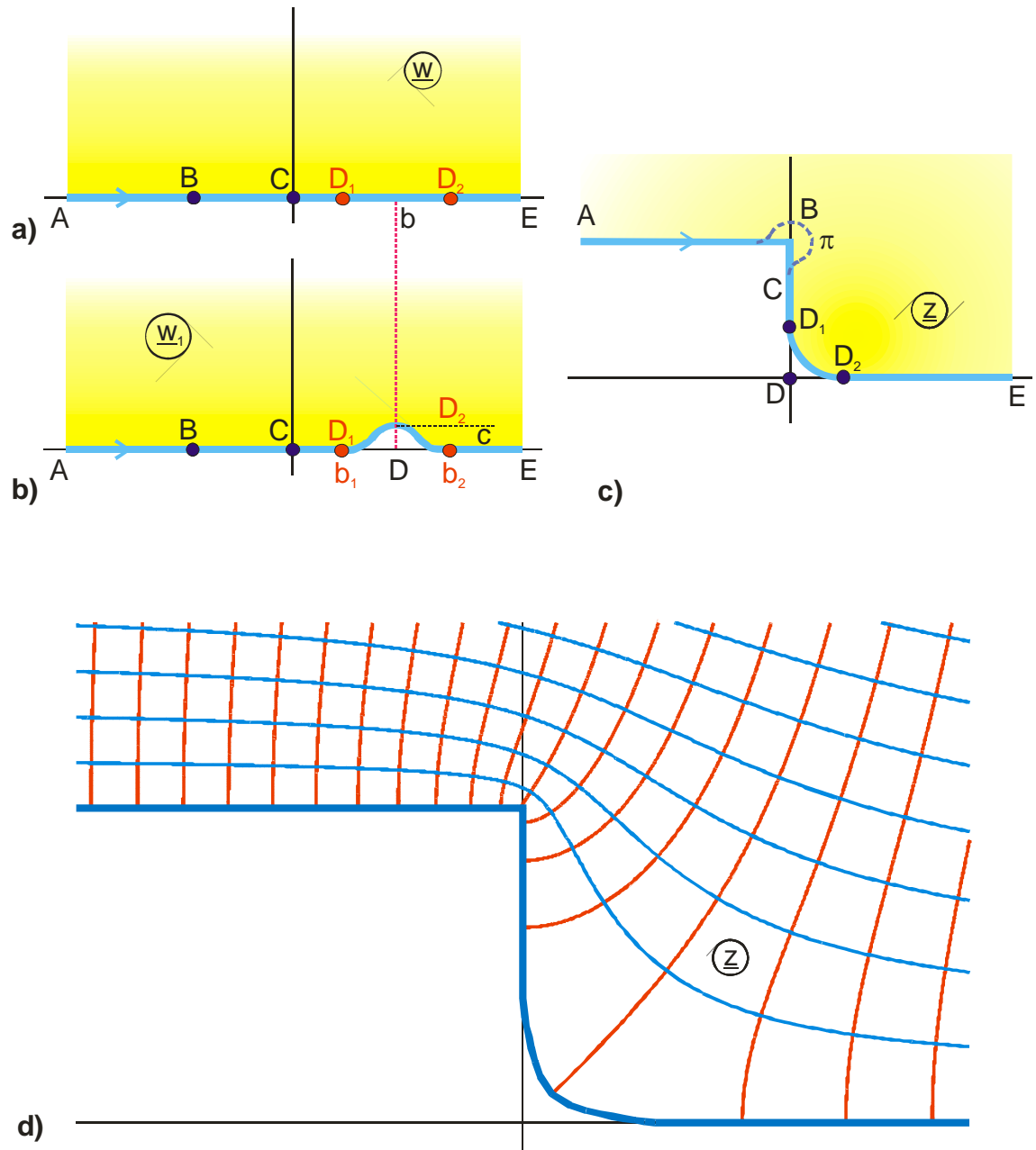


Bild 9.9: M 5, Abrunden einer Innenecke entsprechend Beispiel 6

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens ist Abb. M 5.1.

10. Elektroden mit konstanter Feldstärke

In den bisher betrachteten konformen Abbildungen waren die Oberflächen der leitenden Elektroden jeweils Flächen konstanten Potentials. Bei der konformen Abbildung von einer Ausgangsebene in eine Bildebene blieb die Eigenschaft einer Randlinie, eine Potentiallinie zu sein, jeweils erhalten. Die elektrische Feldstärke entlang dieser Potentiallinie, d.h. anschaulich die Dichteverteilung der dort endenden Feldlinien, änderte sich jeweils durch die Abbildung. Die mit Hilfe der konformen Abbildung zu lösende Aufgabe lautet ja meist: Wie bildet man die geradlinige Berandung eines homogenen Feldes (mit überall konstanter Feldstärke) auf ein gegebenes inhomogenes Feld mit krummliniger Berandung ab, damit man in diesem inhomogenen Feld die örtliche Verteilung der elektrischen Feldstärke berechnen kann. Bei der konformen Abbildung in eine andere Ebene ändert sich also grundsätzlich die elektrische Feldstärke entlang einer Potentiallinie.

In einigen technischen Anwendungsfällen wird jedoch gezielt nach Elektrodenformen gesucht, entlang derer die elektrische Feldstärke konstant ist (z.B. in der Hochspannungstechnik) oder man versucht den Verlauf solcher Randkurven, die sich im Experiment einstellen, zu berechnen (z.B. in der Hydrodynamik). Im Fall der Elektrostatik gilt für eine Elektrode mit konstanter Feldstärke in einem Feldbild $\underline{z} = f(\underline{w})$

$$1. \quad u = \text{const} \quad \text{oder} \quad v = \text{const} \quad (\text{Potentiallinie}) \quad (1)$$

$$\text{und} \quad 2. \quad |\vec{E}| = \left| \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} \right|} = \text{const} \quad (\text{konst. Feldstärke}). \quad (2)$$

Im Fall der Hydrodynamik entspricht einer derartigen Berandung entweder eine feste Berandung (Potentiallinie), entlang der die Strömungsgeschwindigkeit v konstant ist

$$|\vec{v}| = \text{const}, \quad (3)$$

oder die Begrenzung eines freien Strahls, z.B. als Grenze zwischen ausströmendem Wasser und Luft bzw. strömendem Wasser und ruhendem Wasser (Totwasser), entlang der ebenfalls der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} konstant ist.

Für die beiden trivialen Fälle des homogenen Feldes

$$\underline{z} = \underline{w} \quad (4)$$

und des Feldes einer Linienladung

$$\underline{z} = \exp(\underline{w}\pi) \quad (5)$$

sind sämtliche Potentiallinien zugleich Linien konstanter Feldstärke. Bei allen anderen Potentialfeldern

$$\underline{z} = f(\underline{w}) \quad (6)$$

existiert höchstens eine Potentiallinie, entlang der der Betrag der elektrischen Feldstärke konstant ist. Bild 10.1 zeigt ein Beispiel für eine derartige Elektrode gegenüber einer einspringenden 90°-Ecke. Entlang der Strecke CD sind die Feldlinien gleichabständig. Dort ist sowohl in der w -Ebene (homogenes Feld) als auch in der z -Ebene die elektrische Feldstärke E konstant. Für den normierten Fall $E = 1$ gilt

$$\left| \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} \right|_{\underline{w}=\underline{w}_h} = 1. \quad (7)$$

das bedeutet, daß die Strecke CD in der z -Ebene auch abschnittsweise genauso lang ist, wie in der w -Ebene. Für jeden Ort dieser Kurve gilt, daß die relative Längenänderung konstant bzw. gleich 1 ist

$$\left| \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} \right| = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta z_h}{\Delta w_h} = 1. \quad (8)$$

Die Bogenlänge in der z -Ebene ergibt sich damit zu

$$\int_{z_1}^{z_2} \underline{z}_h d\underline{z} = u_2 - u_1, \quad (9)$$

wenn der Rand mit der homogenen Feldstärke (Index h für homogen) wie in Bild 10.1a auf eine Linie $v = \text{const}$ abgebildet wird. Im anderen Fall ergibt sich als Bogenlänge $v_2 - v_1$.

Daraus folgt unmittelbar, daß es sich, wenn **zwei** benachbarte Linien diese Bedingung erfüllen, entweder um ein homogenes Feld oder um das Feld einer Linienladung han-

delt. **Jedes inhomogene Feld kann nur eine derartige Linie enthalten.** Bei einfach bzw. doppelt periodischen Feldern sowie bei symmetrischen Feldern gilt dieser Satz nur für das inhomogene Feld innerhalb eines Periodenstreifens, innerhalb eines Periodenrechtecks bzw. innerhalb eines unsymmetrischen Sektors.

Mit Hilfe der Strömungslehre kann man weiterhin ableiten, daß für eine unendlich ausgedehnte Berandung die Kanalbreite h_1 am einen Ende gleich groß sein muß wie die Kanalbreite h_2 am anderen Ende. Im jeweils unendlich fernen Punkt wird die Strömung homogen. Da die Durchflußmenge bei zwei durchgehend festen Berandungen konstant bleibt, müssen die Kanalbreiten im Homogenen gleich groß sein, sofern entlang einer Berandung auch die Geschwindigkeit konstant bleibt. Der Beweis wird noch einfacher für den Fall, daß man sich die z -Ebene als komplexe Zahlenkugel vorstellt. Im Punkt Unendlich gehen dann Punkt C und D bzw. Punkt B und E ineinander über. Die Kanalenden sind dort miteinander verbunden und ihre Ränder gehen stetig ineinander über.

Für die Potentiallinie mit konstanter Feldstärke folgt aus $1 / \left| \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right| = 1$

$$\left(\frac{\partial x_h}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_h}{\partial u} \right)^2 = 1 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial x_h}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_h}{\partial v} \right)^2 = 1 \quad (11)$$

Beispiel 1: Linie konstanter Feldstärke vor einer einspringenden Ecke

Das Feldbild in Bild 10.1b ergibt sich aus der konformen Abbildung

$$\underline{w}_1 = \tanh(\underline{w}\pi) \quad (12)$$

$$\underline{w}_2 = \sqrt{\underline{w}_1} \quad (13)$$

$$\underline{z} = 2j[\arctanh \underline{w}_2 - \arctan \underline{w}_2] + \pi + j\pi. \quad (14)$$

Entlang der Potentiallinie CD ist die elektrische Feldstärke E konstant. Dort gilt (für $\underline{z} = \underline{z}_h$)

$$|\vec{E}| = \left| \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right| = |\underline{w}'| = \text{const.} \quad (15)$$

In der Hydrodynamik heißt die w' -Ebene bzw. die $(-w')$ -Ebene Hodograph-Ebene. Das Abbild der Linie CD in dieser Ebene ist der Hodograph. Da der Betrag von \underline{w}' längs dieser Linie konstant ist, handelt es sich um einen zum Nullpunkt konzentrischen Kreisbogen.

Betrachtet man statt dessen die konforme Abbildung

$$\underline{z}' = \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}}. \quad (16)$$

in der z' -Ebene, so ergibt sich diese aus Gl. (12 bis 14) zu

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}_2} \cdot \frac{d\underline{w}_2}{d\underline{w}_1} \cdot \frac{d\underline{w}_1}{d\underline{w}} \quad (17)$$

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} = j2\pi\sqrt{\tanh(\underline{w}\pi)}. \quad (18)$$

Auch in dieser Ebene gilt

$$\left| \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} \right|_{\underline{w}=\underline{w}_h} = \text{const} \quad (19)$$

mit $\underline{w}_h = u + j/4$.

Die Linie DC ist in der z' -Ebene ein zum Nullpunkt konzentrischer Kreisbogen mit dem Radius 2π (Bild 10.1c).

Die Spiegelung an Elektroden mit konstanter Feldstärke wird auch in Kapitel 1.5 behandelt.

Ergänzt man das Feldbild in der z -Ebene symmetrisch durch Spiegelung an den Achsen so, daß alle 4 Quadranten felderfüllt sind, dann ergibt sich als Abbild der nunmehr 4 Linien mit konstanter Feldstärke in der z' -Ebene ein Vollkreis um den Nullpunkt. Außerhalb dieses Kreises ist das Feldbild in der z' -Ebene vollständig bekannt.

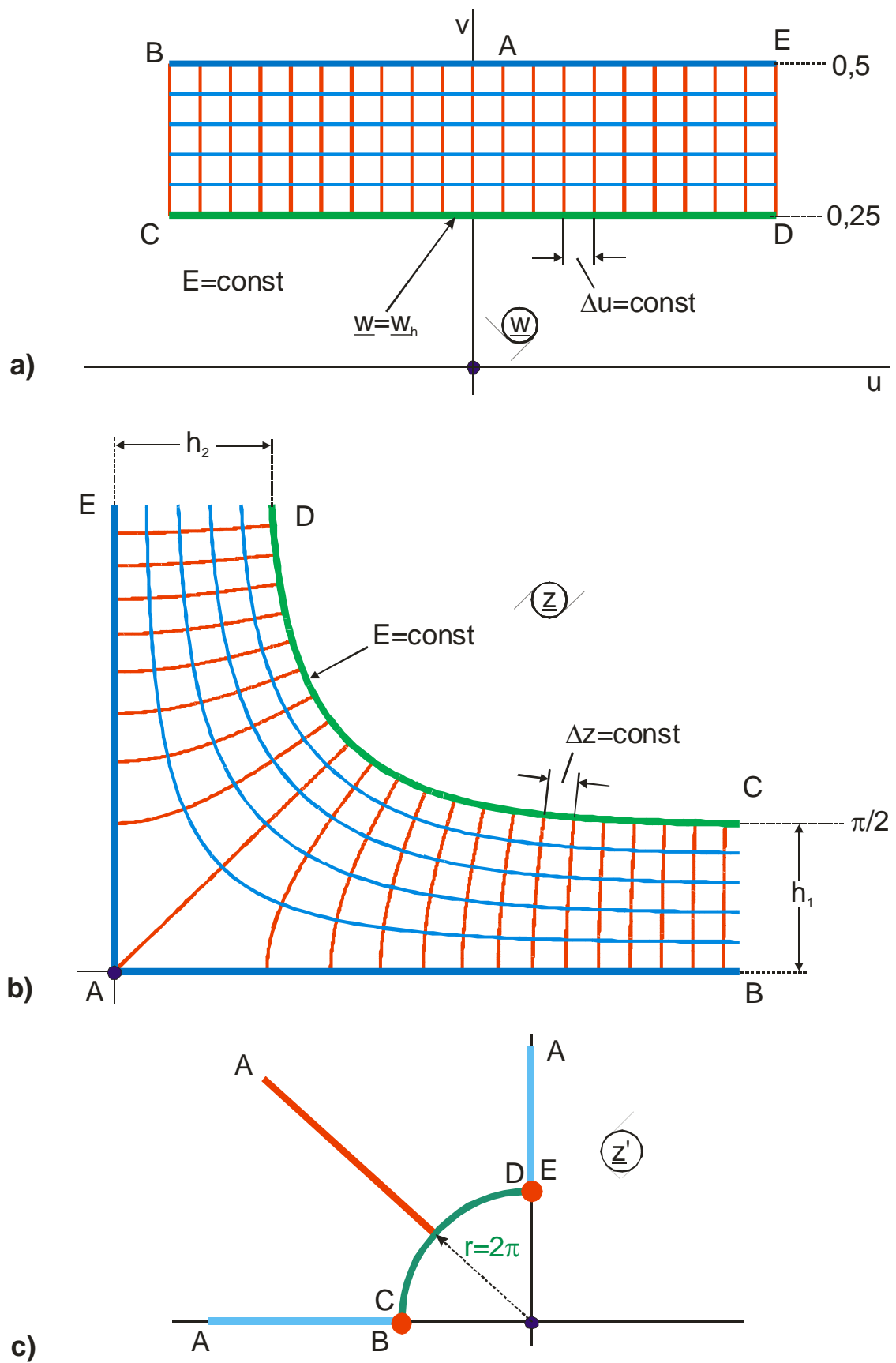


Bild 10.1: Feldbild mit einer unendlich ausgedehnten Elektrode mit konstanter Feldstärke (N 1)

Nach dem Spiegelungsprinzip (Kap. 1.5) ist damit auch das Feldbild innerhalb des Kreises festgelegt und bekannt. Zu der Potentiallinie BAE außerhalb des Kreises gehört eine Potentiallinie HGF innerhalb des Kreises. Diese ist in Bild 2c gestrichelt eingetragen. Das Abbild dieser Berandung ist ebenfalls in der z -Ebene und in der w -Ebene eingetragen. In der w -Ebene sind die Verhältnisse einfach überschaubar. Die Spiegelung an der Linie CD ist dort die Spiegelung an einer Geraden. Die Zuordnung der Punkte des unteren Halbstreifens zu denen des oberen Halbstreifens liegt eindeutig fest. In der z -Ebene ergibt sich aus der Betrachtung der Punkte $\underline{w} \rightarrow \pm \infty$, daß die Kanalbreiten dort gleich groß sein müssen. Die Zuordnung aller anderen Punkte ist ebenfalls fest vorgegeben. Sie kann über die Spiegelung am Kreis in der z' -Ebene und über die Abbildung von der z' -Ebene in die z -Ebene berechnet werden.

Nachdem die gespiegelte Berandung HGF in Bild 10.2b eingetragen ist, sieht man, daß Abb. N 1 in Bild 10.1 nichts anderes ist als die eine Hälfte der Abb. D4 aus dem Abbildungsverzeichnis. Die Abbildungsfunktion Gl. (12-14), die in Beispiel 1 zunächst ohne Begründung vorgegeben wurde, um die gezeigten Zusammenhänge anschaulich darstellen zu können, war aufgrund dieser Spiegelungsgesetze also bereits vorher bekannt.

Die Potentiallinie CD in Bild 10.1b, entlang der die elektrische Feldstärke konstant ist, hat in Parameterform die Darstellung

$$x_h = \pi - \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right] \quad (20)$$

$$y_h = \pi - \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right] \quad (21)$$

mit $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Die an diesem Beispiel gezeigten Zusammenhänge haben für alle Feldbilder mit Linien konstanter Feldstärke Gültigkeit:

- Potentiallinien mit konstanter Feldstärke in der z -Ebene sind in der z' -Ebene zum Nullpunkt konzentrische Kreisbögen.

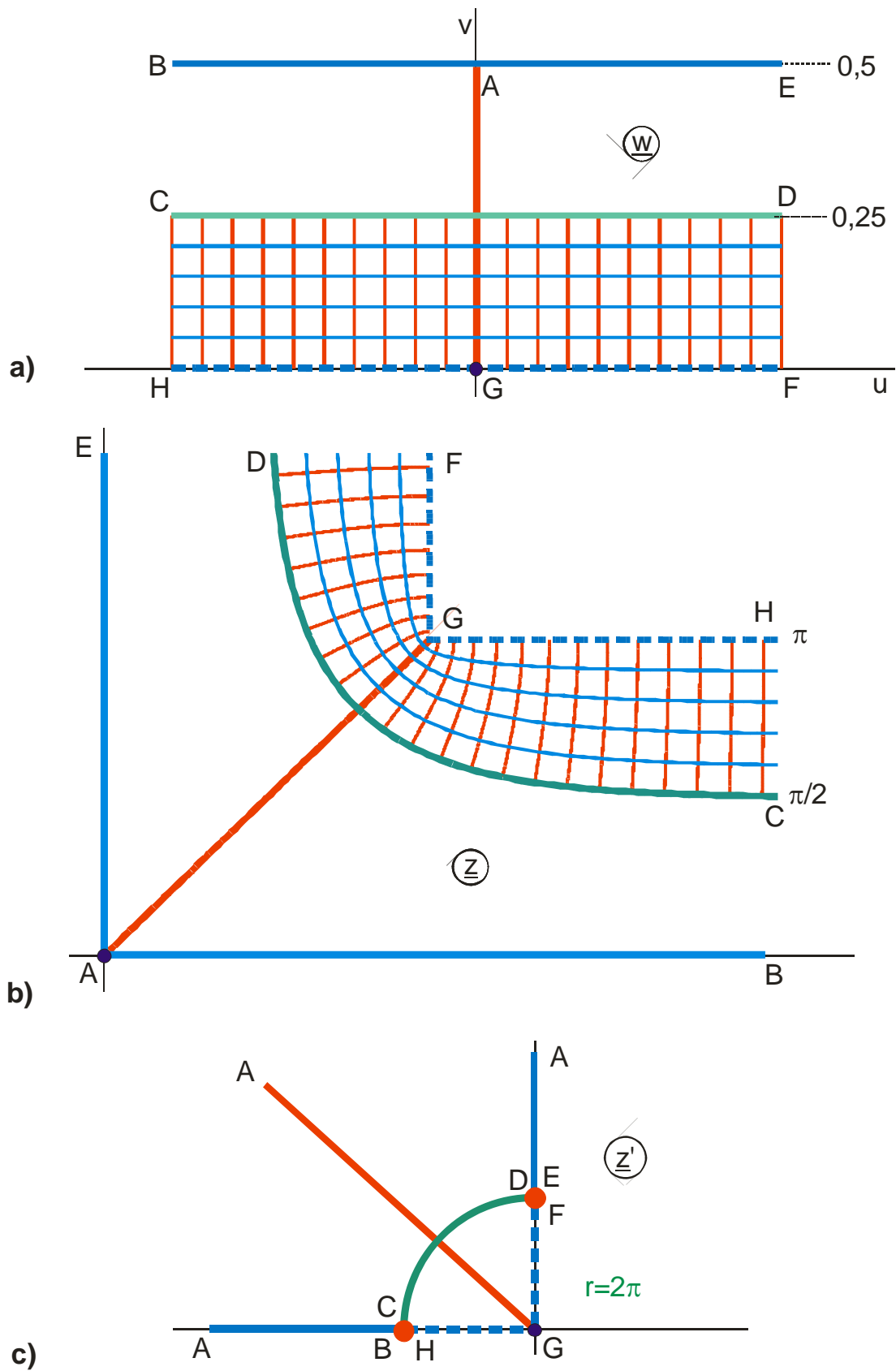


Bild 10.2: Beispiel 1 mit gespiegelter Potentiallinie BAE

- Eine Potentiallinie mit konstanter Feldstärke hat analog zu geraden und kreisförmigen Potentiallinien die Eigenschaft eines Spiegels. Ist das Feldbild auf der einen Seite bekannt, so ergibt sich daraus das Feldbild auf der anderen Seite.
- Integriert man eine Abbildungsfunktion, deren Feldbild eine zum Nullpunkt konzentrische Potentiallinie enthält, dann wird aus dieser Linie eine Potentiallinie mit konstanter Feldstärke.
- Die Linie konstanter Feldstärke ist stets die Mittellinie (Symmetrielinie) in der w-Ebene.

Mit Hilfe dieser Spiegelungsgesetze lassen sich sehr einfach weitere Feldbilder mit leitenden Berandungen mit konstanter Feldstärke (Abbildungsgruppe N) finden. Bild 10.3 zeigt einige Beispiele. Die gespiegelte Berandung ist jeweils gestrichelt eingetragen.

In Abb. N 1 (Bild 10.1) hat die Linie konstanter Feldstärke den Verlauf:

$$y_h = \ln \coth(x_h / 2). \quad (22)$$

In Abb. N 1.3 (Bild 10.3b) hat die Linie konstanter Feldstärke den Verlauf:

$$x_h = -\frac{1}{2} \ln \cos(2 y_h). \quad (23)$$

In Abb. N 1.1 (Bild 10.3c) hat die Linie konstanter Feldstärke den Verlauf:

$$x_h = \ln \left\{ \frac{1+k}{k} \frac{[1 - k \operatorname{sn}^2(v, k)]^2}{\operatorname{dn}^2(v, k) + k^2 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{cn}^2(v, k)} \right\} \quad (24)$$

$$y_h = 2 \arctan \left\{ k \frac{\operatorname{sn}(v, k) \operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)} \right\}. \quad (25)$$

In Abb. N 1.2 (Bild 10.3f) hat die Linie konstanter Feldstärke den Verlauf:

$$x_h = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln \left\{ \frac{\sqrt{2} + \operatorname{sn}^2(v, k)}{\sqrt{2} - \operatorname{sn}^2(v, k)} \right\} \quad (26)$$

$$y_h = 2 \arctan \frac{\operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k)}{\operatorname{cn}(v, k)} = 2 \arctan \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}(2v, k)}{1 + \operatorname{cn}(2v, k)}}. \quad (27)$$

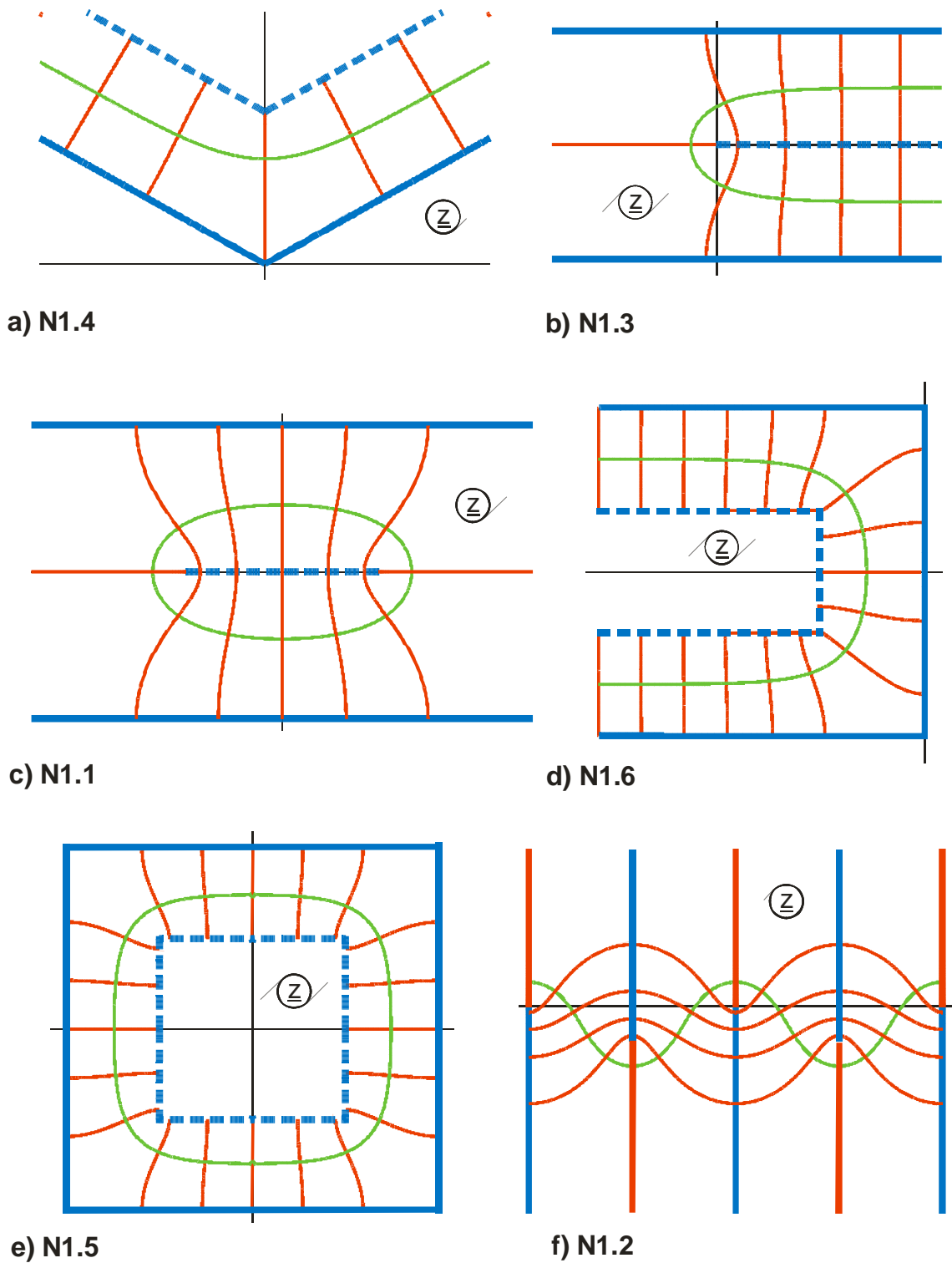


Bild 10.3: Feldbilder, die Potentiallinien mit konstanter Feldstärke enthalten (hellgrün). Die daran gespiegelte Berandung ist jeweils gestrichelt eingetragen.

Beispiel 2: Bordas Mundstück

In der Hochspannungstechnik [1] und in der Hydrodynamik [28, 30] ist eine Elektrodenanordnung entsprechend Bild 10.4 bekannt. Sie heißt π -Borda-Profil [1] oder Bordas-Mundstück [3]. In einem großen Flüssigkeitsbehälter befindet sich ein langer Kanal mit parallelen Seitenwänden AB und A'B' (dunkelgrün). Durch diesen leeren Kanal hindurch fließt die Flüssigkeit ab. Obwohl die Ausflußrichtung in Bild 10.4 nach unten gerichtet ist, wird der Einfluß der Schwerkraft nicht berücksichtigt. Sofern sich eine Potentialströmung einstellt, ergeben sich die Kurven BC und B'C' als Begrenzungslinien des freien Strahls. In den hellgrünen Bereichen ist keine Flüssigkeit bzw. ruhende Flüssigkeit.

In der Hydrodynamik sind mehrere Verfahren bekannt, mit denen sich die Ränder von freien Strahlen analytisch ermitteln lassen [30, 28, 32, 1, 3]. In Parameterform ergibt sich die Linie BC damit zu

$$x = \sin \varphi - \varphi \quad (28)$$

$$y = 1 - \cos \varphi + 2 \ln \cos(\varphi / 2) \quad (29)$$

mit $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Zur Berechnung des Feldbildes kehren wir zurück zu den Bezeichnungen der Elektrostatik und betrachten nur eine Hälfte der symmetrischen Anordnung (Bild 10.5a). Nach den Spiegelungsgesetzen, die für die gestrichelt eingetragene Linie BC mit konstanter Feldstärke E gültig sind, wird zunächst Punkt E abgebildet auf Punkt D und die Abstände DC und CE sind gleich groß (Spiegelung an einer Geraden). Punkt B geht offensichtlich in sich selbst über. Der gesamte große Bereich rechts von der Linie ABC wird auf den gestrichelten, kleinen Bereich links von DBC gespiegelt. Das Feld im großen Bereich wird erzeugt von einer positiven Linienladung $+1$ bei $-\infty$ und endet in einer negativen Linienladung -1 bei $+\infty$. Das Feld im gespiegelten Bereich endet ebenfalls in einer Linienladung -1 bei $+\infty$. Folgerichtig muß entlang der Linie DB eine positive Linienladung der Größe $+1$ existieren, die dieses Feld erzeugt. Dieser Ort G ist das Spiegelbild des Punktes A bzw. F.

Da man Linienladungen durch Vorabbildungen beliebig hinzufügen kann, lautet die Aufgabe zunächst: Welche Abbildungsfunktion erzeugt das Feldbild zwischen einer Halbgeraden ABD und einer unendlich langen Geraden FE? Aus dem Abbildungsverzeichnis ergibt sich Abb. C2. Die Funktion

$$\underline{z} = -\underline{w}_1 - \ln \underline{w}_1 \quad (30)$$

bildet die untere w_1 -Halbebene (Bild 10.5b) auf die obere z -Halbebene ab (Bild 10.5a). Die im Punkt C = Punkt D = Punkt E bei $+\infty$ insgesamt vorhandene Linienladung der Stärke -2 wird dabei in den Nullpunkt der w_1 -Ebene abgebildet. Punkt B kommt nach -1 . Die Linienladung der Stärke $+1$ liegt irgendwo zwischen B und D. Die Linienladung der Stärke $+1$ bei Punkt A = Punkt F liegt bei $\underline{w}_1 = \infty$.

Im nächsten Schritt wird also eine Vorabbildung gesucht, die diese Linienladungsverteilung entlang der reellen Achse erzeugt. Aus Beispiel 3.2 oder aus der Abbildung L3 im Abbildungsverzeichnis findet man die Abbildungsfunktion

$$\underline{w}_1 = -a \left\{ \frac{\exp(\underline{w}\pi)}{2} \left[1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \exp(\underline{w}\pi)} \right] \right\}. \quad (31)$$

Nach wie vor unbekannt ist dabei der Faktor a , durch den die Lage des Punktes G in der w_1 -Ebene festgelegt wird. Da genau diejenige Abbildungsfunktion gesucht wird, für die entlang der Linie BC

$$\left| \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} \right| = \text{const} \quad (32)$$

erfüllt ist, ergibt sich aus dieser Bedingung $a = 1/2$. Damit sind die Abbildungsfunktion und das Feldbild des π -Borda-Profiles bekannt.

Das π -Borda-Profil wird zum Beispiel in der Hochspannungstechnik eingesetzt, um Feldstärkespitzen zu vermeiden oder um homogene Felder zu erzeugen. Es ergibt wesentlich kleinere Randbereiche als das meist eingesetzte Rogowski-Profil (Mittellinie $v = 0,5$ bei Abb. C 2).

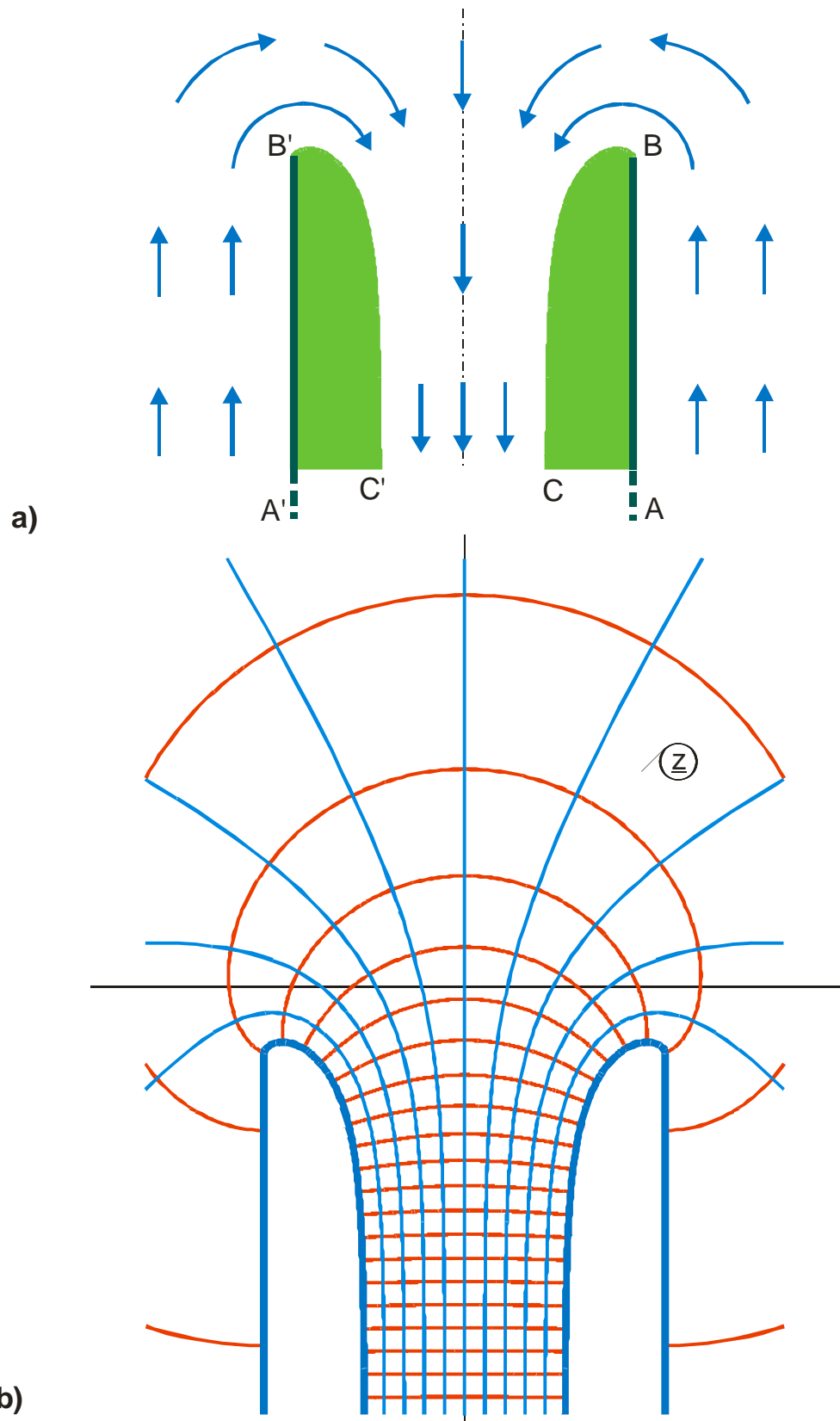


Bild 10.4: Ebene Strömung in einem offenen Kanal (Bordas Mundstück, N 2.2)

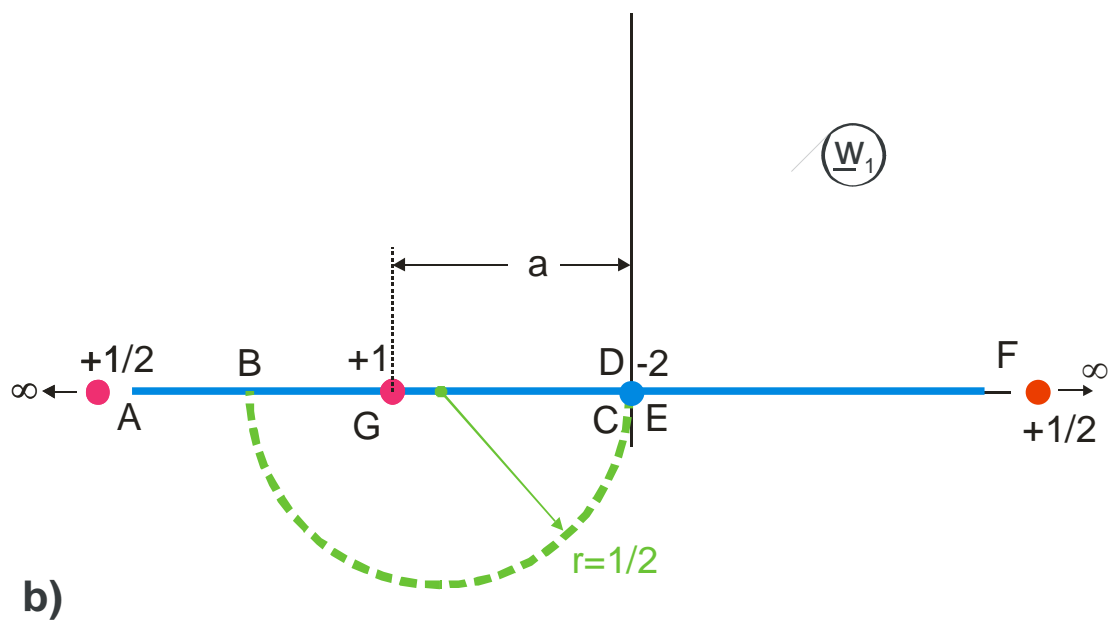
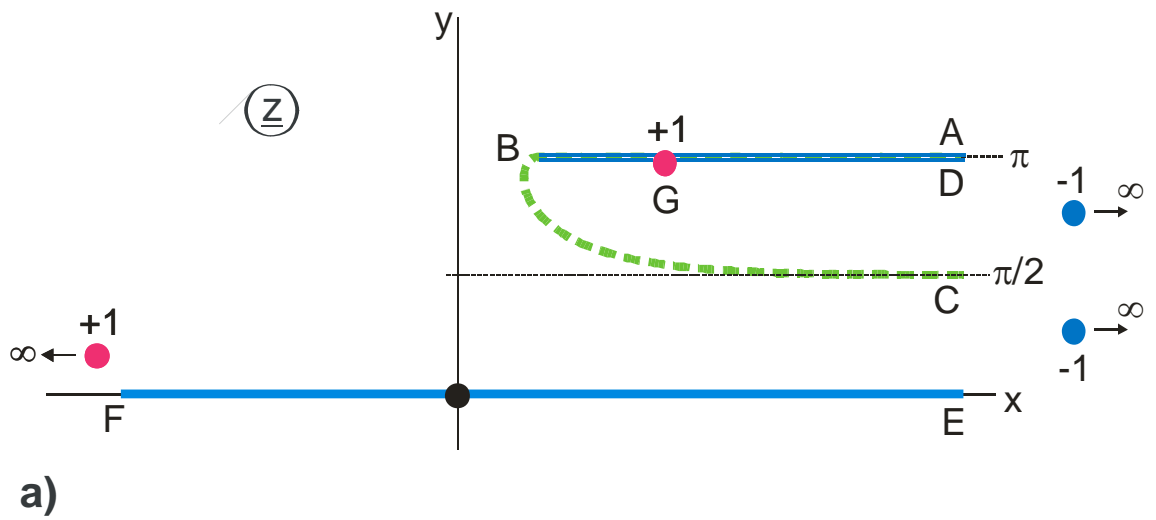


Bild 10.5: Beispiel 2, π -Borda-Profil

Beispiel 3: Strömung gegen eine senkrecht stehende Platte

Gesucht ist das Feldbild einer ausgedehnten Strömung, die auf eine dünne Platte der Breite $2a$ senkrecht auftrifft. Im Punkt B wird die Strömungsgeschwindigkeit 0. Entlang der Strecke BC verläuft die Strömung ausschließlich horizontal. Dies führt dazu, daß sie sich im Punkt C von der Platte ablöst. Entlang der Linie CD entsteht eine freie Strahlgrenze (grüne Linie, Bild 10.6).

Die Fragestellung wird gelöst mit dem Verfahren der Überlagerung von Feldbildern. Es wird nur eine Hälfte der symmetrischen Anordnung betrachtet. Der bereits aus Beispiel 4.1 bekannten Abbildung einer Stufe

$$\underline{z}_1 = \sqrt{\underline{w}} \cdot \sqrt{1 - \underline{w}} + \arcsin \sqrt{\underline{w}} \quad (33)$$

wird eine Abbildung überlagert, deren Rand von A bis C den gleichen Verlauf sowohl in der w -Ebene als auch in der z -Ebene hat und die aber dann entlang CD weiter horizontal verläuft, anstatt vertikal, wie die Stufe und so die gesuchte horizontale Strömungskomponente erzeugt (Bild 10.7):

$$\underline{z}_2 = b\sqrt{\underline{w}}. \quad (34)$$

Als Lösung ergibt sich damit

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2. \quad (35)$$

Der noch unbekannte Faktor b wird bestimmt aus der Bedingung

$$\left| \frac{d\underline{z}}{d\underline{w}} \right|_{u \geq 1} = \text{const.} \quad (36)$$

Er ergibt sich zu $b = 2$. Die gesuchte Lösung ist

$$\underline{z} = 2\sqrt{\underline{w}} + \sqrt{\underline{w}} \sqrt{\underline{w} - 1} + \arcsin \sqrt{\underline{w}} \quad (37)$$

mit $a = 2 + \pi/2$ (Abb. N 2.1).

Um dieses Beispiel möglichst einfach zu gestalten, wurde für das Feldbild z_1 nicht die in Beispiel 4.1 berechnete Lösung Gl. (4.32) benutzt, bei der die Punkte B und C bei $w = \pm 1$ liegen. Geht man von Gl. (4.32) aus, muß das zu überlagernde Feldbild

$$\underline{z}_2 = 2\sqrt{w-1} \quad (38)$$

lauten. Auch mit dieser Form der Lösung ergibt sich selbstverständlich das gleiche Feldbild.

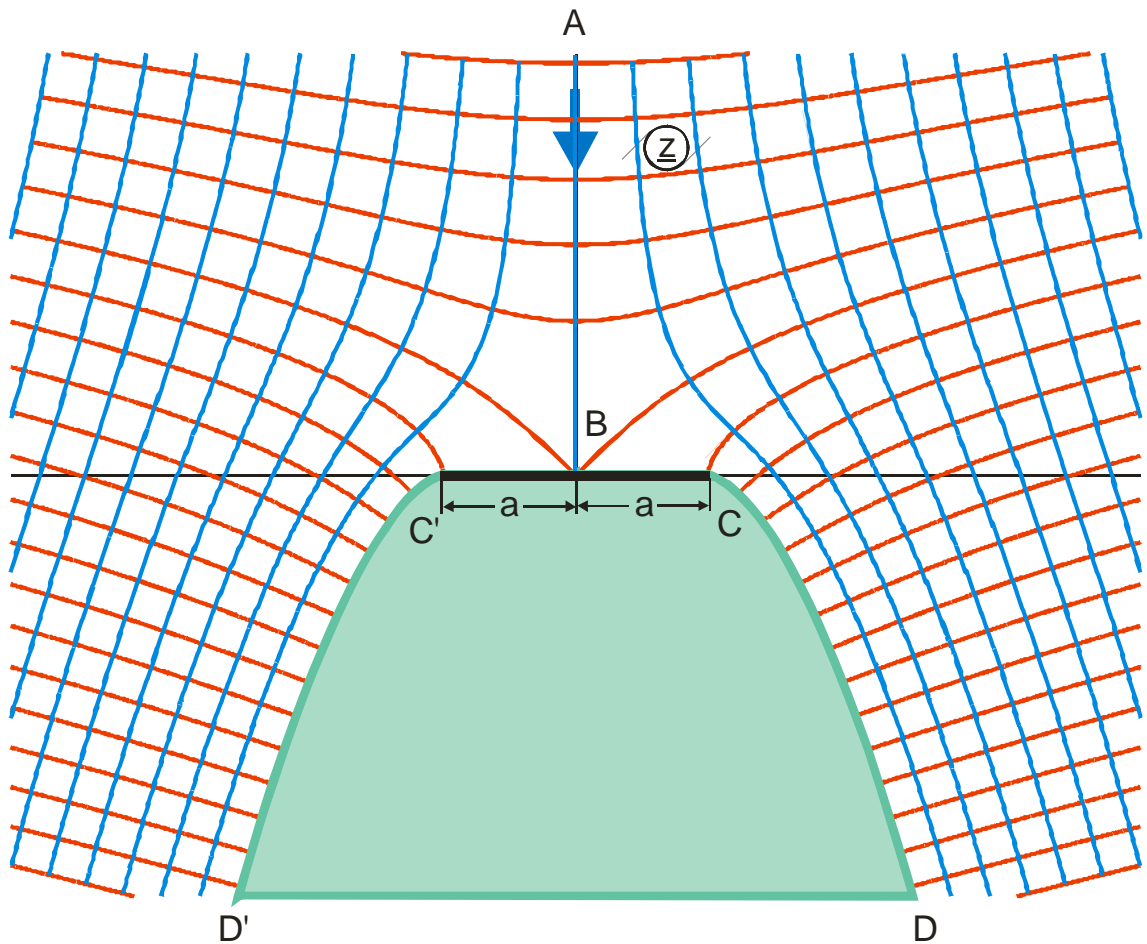


Bild 10.6: Beispiel 3, homogene Strömung gegen eine senkrecht stehende Platte
Abbildung N 2.1

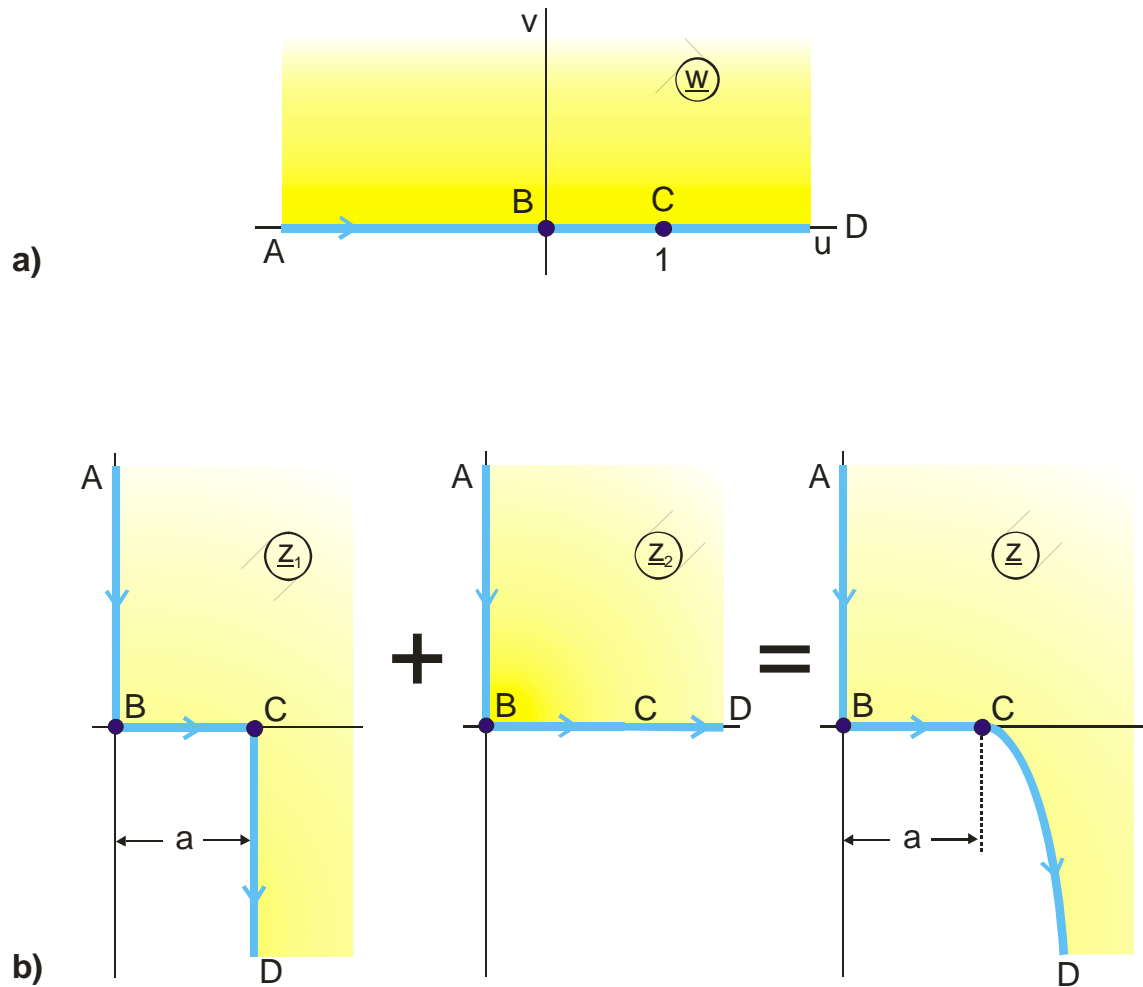


Bild 10.7: Lösungsweg für Beispiel 3

Beispiel 4: Ausströmende Flüssigkeit

In einem großen Flüssigkeitstank befindet sich, wie in Bild 10.8 skizziert, ein Schlitz der Breite $2a$. Auch hier erhält die laminar ausströmende Flüssigkeit durch die Berandung CD eine horizontale Geschwindigkeitskomponente. Es bildet sich eine freie Strahlgrenze DA ($\pi/2$ -Borda-Profil) mit der Parameterdarstellung

$$x = \sin \varphi - \ell \ln \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (33)$$

$$y = 1 - \cos \varphi \quad (34)$$

mit $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Die Abbildungsfunktion ergibt sich analog zu Beispiel 3 aus der Überlagerung zweier Felder $\underline{z}_1(\underline{w})$ und $\underline{z}_2(\underline{w})$ (Bild 10.9).

$$\underline{z}_1 = \arctan \sqrt{\underline{w}_1^2 - 1} - \sqrt{\underline{w}_1^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \quad (35)$$

$$\underline{z}_2 = b \cdot \underline{w}_1 \quad (36)$$

mit $\underline{w}_1 = \exp(\underline{w}\pi)$. (37)

Aus der Bedingung

$$\left| \frac{d(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)}{d\underline{w}} \right|_{\overline{DA}} = \text{const} \quad (38)$$

ergibt sich $b = 1$. Damit ist die gesuchte Lösung:

$$\underline{z} = \underline{w}_1 + \arctan \sqrt{\underline{w}_1^2 - 1} - \sqrt{\underline{w}_1^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \quad (39)$$

mit $\underline{w}_1 = \exp(\underline{w}\pi)$ (40)

und $a = 1 + \pi/2, \quad b = \pi/2.$ (41)

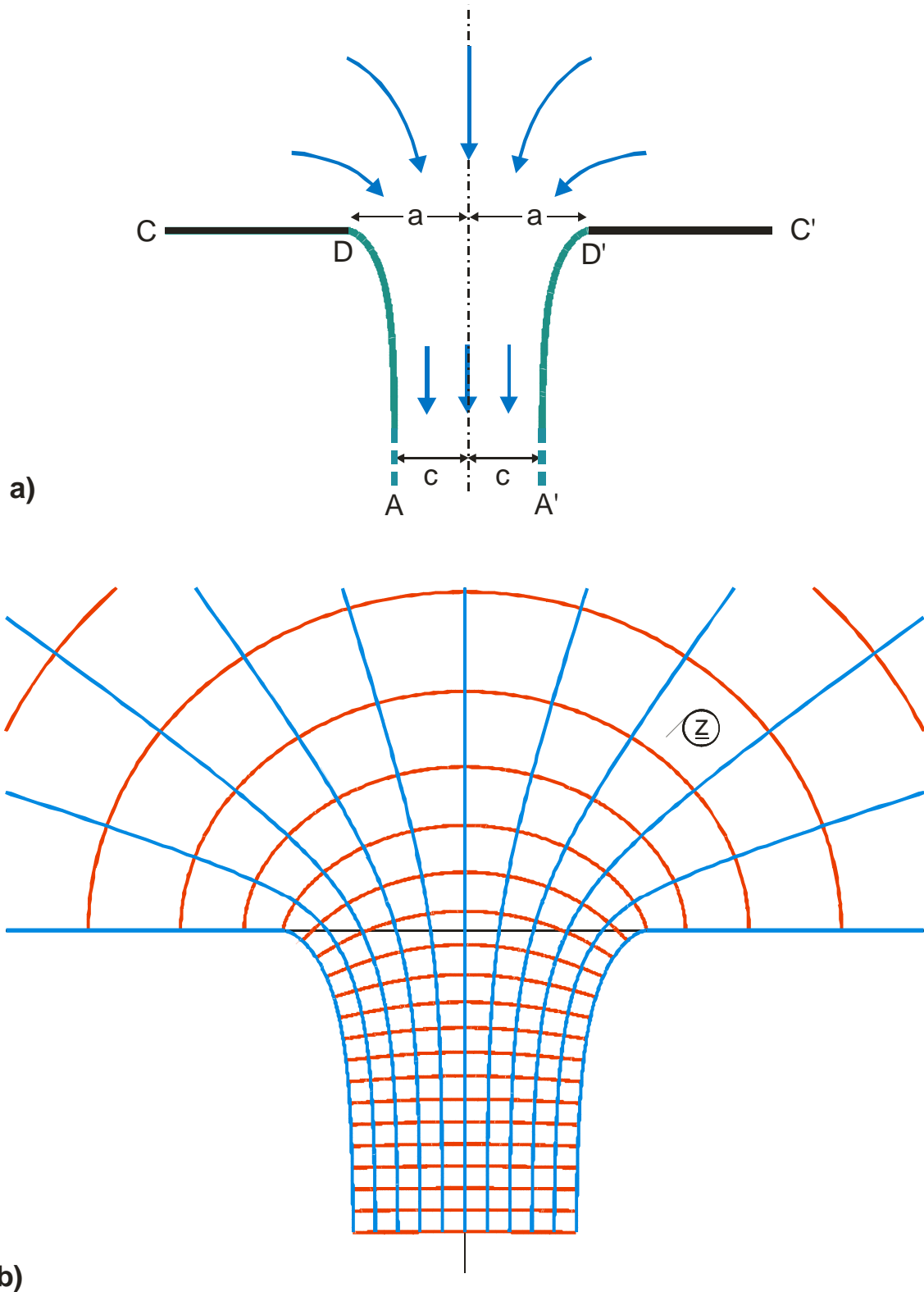


Bild 10.8: Abbildung N 2, ausströmende Flüssigkeit, $\pi/2$ -Borda-Profil

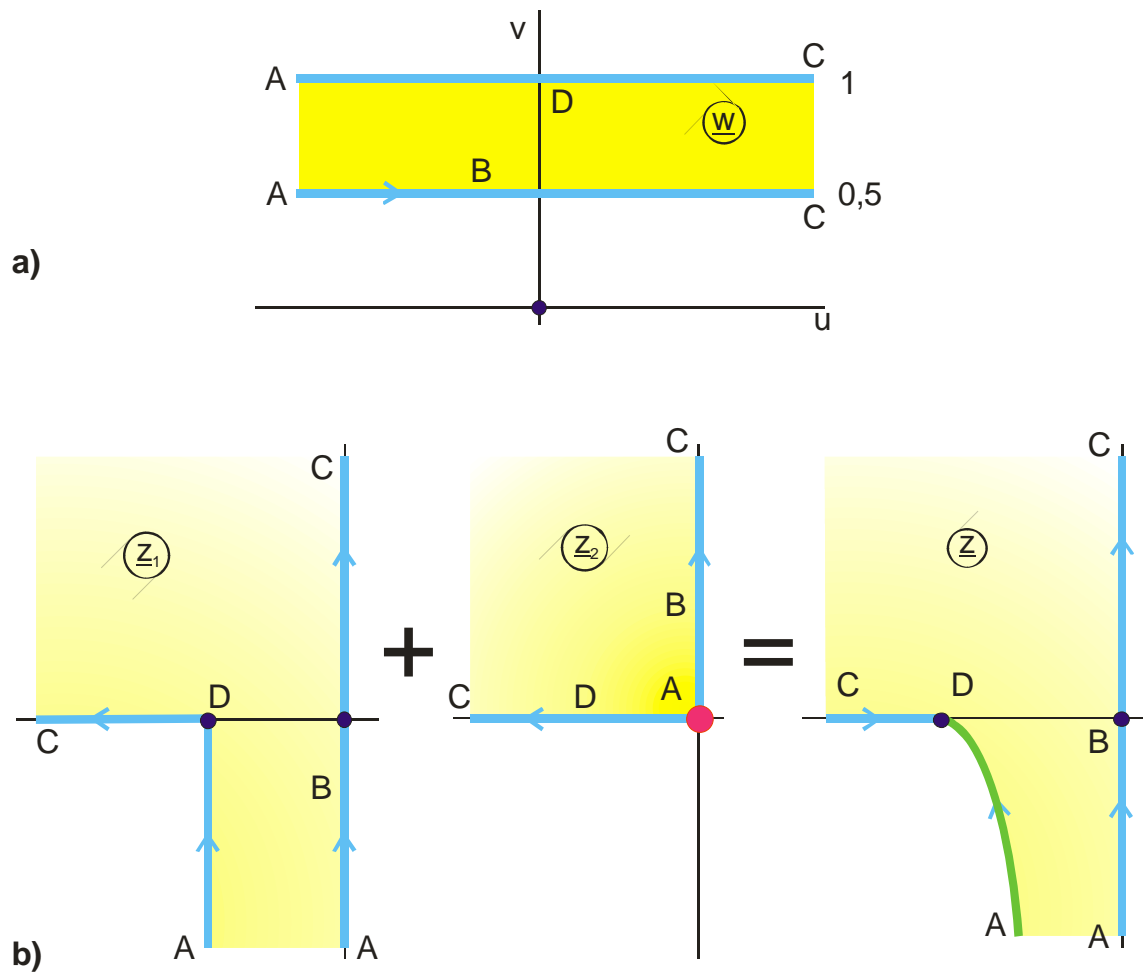


Bild 10.9: Lösungsweg für Beispiel 4, Abbildung N 2

11. Elliptische Funktionen

11.1 Einführung

Um den Unterschied zwischen den elliptischen Funktionen und den trigonometrischen Funktionen anschaulich darzustellen, wird zunächst die Funktion $\underline{z} = \tanh \underline{w}$ als Beispiel für eine konforme Abbildung mit einer trigonometrischen Funktion betrachtet. Wie in Bild 11.1 dargestellt, ist $\tanh \underline{w}$ das Feldbild einer Linienladung vor einer leitenden Ebene. Gibt man der Ebene das Potential 0, so steigt das Potential bei Annäherung an die Linienladung an. Im Ort der Linienladung wird es unendlich groß.

Da die Anzahl der Feldlinien (in Bild 11.1a sind die Feldlinien $n = 0$ bis 5 als durchgezogene blaue Linie eingetragen) unendlich ist, ergibt sich als Abbild des Feldbildes im I. Quadranten der z -Ebene ein unendlich langer Halbstreifen in der w -Ebene.

Alle 4 Quadranten des Feldbildes ergeben sich als Abbildung eines unendlich langen Parallelstreifens der Breite π in der w -Ebene (Bild 11.1c).

Die Funktion $\tanh \underline{w}$ hat in Richtung der imaginären Achse die Periode π . Entlang der reellen Achse ist sie nicht periodisch. Die Funktion ist "einfach periodisch".

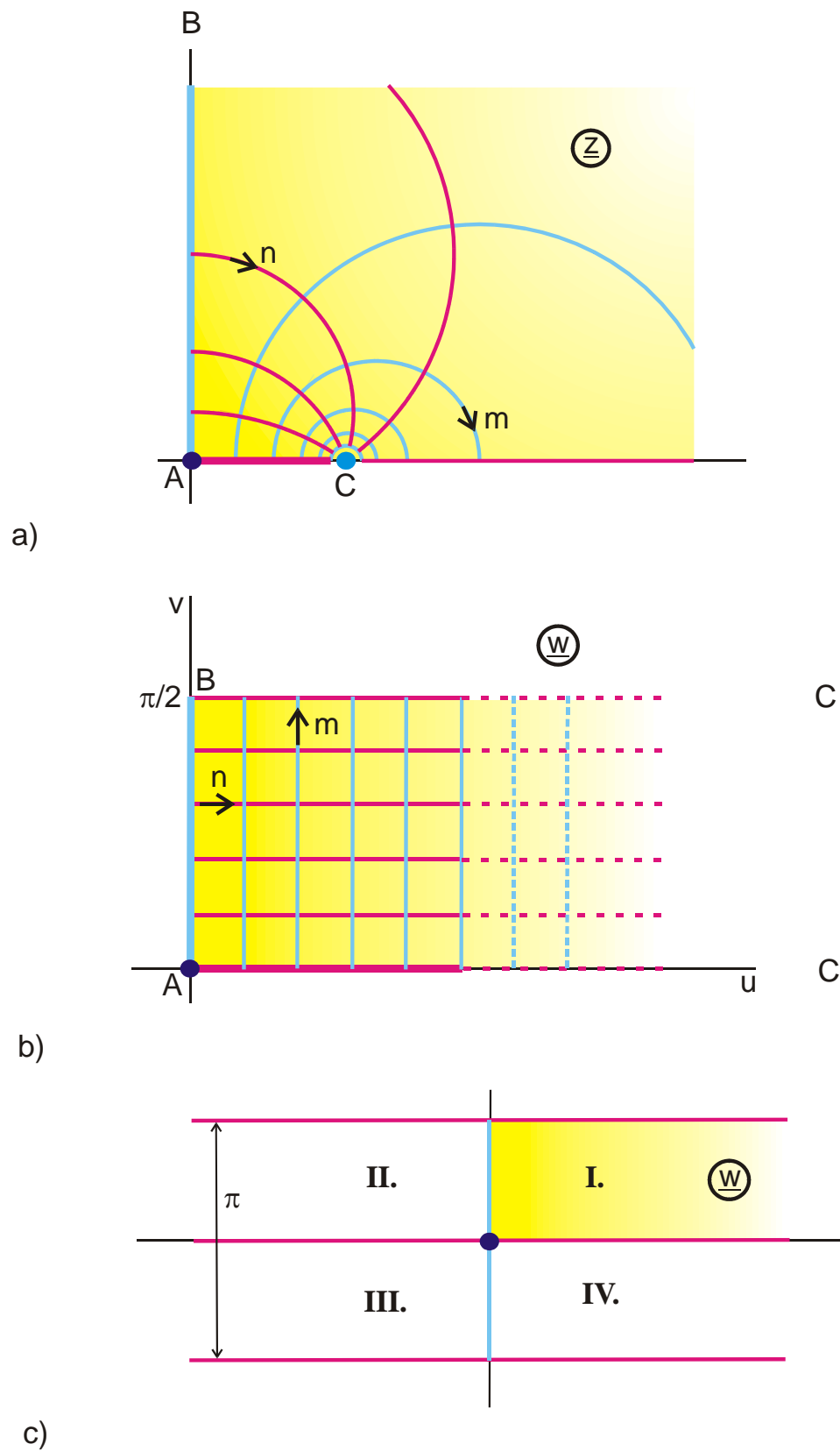


Bild 11.1: Abbildung mit der trigonometrischen Funktion $z = \tanh(w)$

$$\tanh(u + jv) = \frac{\sinh(2u) + j\sin(2v)}{\cosh(2u) + \cos(2v)} \quad (1)$$

$$\tanh(\underline{w} \pm jn\pi) = \tanh(\underline{w}) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Charakteristisch für eine derartige Abbildung mit trigonometrischen Funktionen ist also, daß sich das Feldbild der Elektrodenanordnung in der z -Ebene aus der Abbildung eines unendlich ausgedehnten Parallelstreifens in der w -Ebene ergibt. Die Orientierung dieses Parallelstreifens in der w -Ebene ist grundsätzlich beliebig. Jede Abbildungsfunktion $f(w)$ kann durch Multiplikation mit der Konstanten $\exp(j\phi)$ beliebig gedreht werden. Trigonometrische Funktionen sind einfach periodische Funktionen.

Sofern der Parallelstreifen die Breite 2π hat und parallel zur reellen Achse verläuft, gilt:

$$f(\underline{w} \pm n \cdot 2\pi) = f(\underline{w}) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Die Abbildungsfunktion ist unendlich vieldeutig, d.h. alle um $\pm n 2\pi$ verschobenen Parallelstreifen ergeben jeweils wieder das gleiche Feldbild in der z -Ebene. Abbildungen mit trigonometrischen Funktionen sind zum Beispiel die Abbildungen B 1, B 2.2, B 3.3, C 1, D 4, F 2, G 1, H 2, K 1 etc.

Im Vergleich dazu wird nun das Feldbild eines Leiterstreifens vor einer geerdeten, leitenden Ebene betrachtet (Bild 11.2a). Sofern der Leiterstreifen das Potential $U_s = 10 \text{ V}$

hat und im Abstand von $\Delta U = 1 \text{ V}$ jeweils eine Potentiallinie gezeichnet wird, ergeben sich einschließlich der Berandungen 11 Potentiallinien ($n = 0$ bis 10). Da auch die Anzahl der Feldlinien endlich ist (z.B. $m = 0$ bis 5 wie in Bild 11.2a), gehört zu diesem Feldbild in der z -Ebene ein Rechteck in der w -Ebene. Alle 4 Quadranten der z -Ebene werden abgebildet auf ein Rechteck in der w -Ebene mit der Kantenlänge $2K$ in u -Richtung und $2K'$ in v -Richtung.

Die Funktion, die diese Abbildung erzeugt, ist eine elliptische Funktion und heißt $\underline{z} = \text{sn}(\underline{w}, k)$ (ausgesprochen "ess-enn von w und k "). k ist der Modul der Funktion. Durch ihn wird die Größe von K und K' bzw. das Seitenverhältnis K'/K des Rechtecks festgelegt. Bei $\text{sn}(\underline{w}, k)$ ist sowohl der Realteil

$$f(\underline{w} \pm n4K) = f(\underline{w}) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

als auch der Imaginärteil periodisch

$$f(\underline{w} \pm jm2K') = f(\underline{w}) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$\text{sn} = (\underline{w}, k)$ ist eine "doppelt periodische" Funktion.

Sie ist unendlich vieldeutig, d.h. alle um $\pm n2K$ bzw. $\pm m2K'$ verschobenen Rechtecke ergeben jeweils wieder das gleiche Feldbild in der z -Ebene. Analog zu dem trigonometrischen Beispiel in Bild 11.1 wird die Funktion senkrecht zu den roten Berandungen als gerade Funktion fortgesetzt und senkrecht zu den blauen Berandungen als ungerade Funktion.

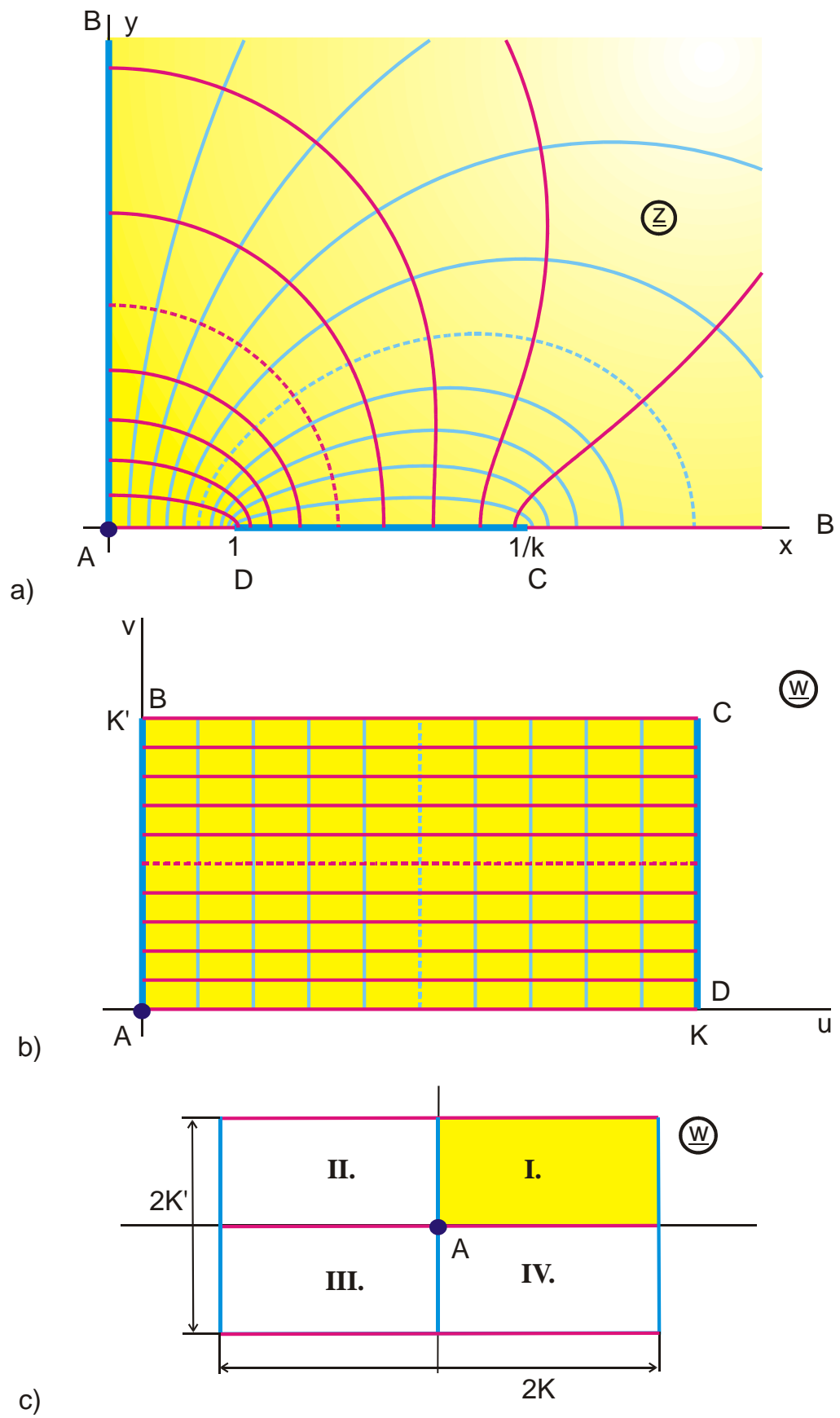


Bild 11.2: Abbildung mit der elliptischen Funktion $z = \text{sn}(\underline{w}, k)$ mit $k=0,3$

Charakteristisch für die durch eine elliptische Funktion erzeugte Abbildung ist also, daß die gesamte z -Ebene auf ein Rechteck in der w -Ebene abgebildet wird. Elliptische Funktionen sind doppelt periodische, meromorphe Funktionen einer komplexen Veränderlichen. In diesem Buch werden drei elliptische Funktionen benutzt und zwar die Jacobischen elliptischen Funktionen $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$, $\operatorname{cn}(\underline{w}, k)$ und $\operatorname{dn}(\underline{w}, k)$ [13-16].

Die Abbildung des Ausschnitts eines Feldbildes in der z -Ebene auf ein Rechteck in der w -Ebene ist auch mit trigonometrischen Funktionen möglich (vergl. Abb. E1). Wenn dagegen die gesamte z -Ebene oder der gesamte Periodizitätsbereich eines in der z -Ebene periodischen Feldbilds abgebildet werden soll, ist die Verwendung elliptischer Funktionen notwendig.

Unbeschadet davon, daß das **Potential** im Feldbild in Bild 11.2a nur einen endlichen Wert annimmt, wird die **Feldstärke** in den Punkten D und C genauso wie in Punkt C in Bild 11.1a jeweils unendlich groß.

11.2 Die Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$

Die Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ ist periodisch.

$$\operatorname{sn}(\underline{w} \pm n4K, k) = \operatorname{sn}(\underline{w}, k) \quad (6)$$

$$\operatorname{sn}(\underline{w} \pm jn2K', k) = \operatorname{sn}(\underline{w}, k) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$\operatorname{sn}(\underline{w} \pm n(4K + j4K'), k) = \operatorname{sn}(\underline{w}, k) \quad (8)$$

Analog zur Funktion $\sin x$ mit der Periode 2π , die eindeutig beschrieben ist durch die Funktionswerte zwischen $x = 0$ und $x = \pi/2$, ergeben sich auch bei der Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ alle anderen Funktionswerte in der gesamten w -Ebene aus denjenigen innerhalb des Rechtecks mit den Kantenlängen K und K' durch Spiegeln an den Berandungen.

Der Wert der Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ wird, ebenso wie der Wert der trigonometrischen Funktionen über eine Reihenentwicklung berechnet. Für eine der möglichen Reihenentwicklungen ist im Anhang das Basic-Rechnerprogramm $\operatorname{Csn}(\operatorname{Re} \underline{w}, \operatorname{Im} \underline{w}, k, \operatorname{Re} \underline{z}, \operatorname{Im} \underline{z})$ angegeben.

Aus dem Modul k der Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ lassen sich die Seitenlängen K und K' des fundamentalen Periodenrechtecks berechnen (siehe Kapitel 12). Durch k wird das Seitenverhältnis K'/K festgelegt. K , K' , k und K/K' lassen sich mit hervorragender Genauigkeit näherungsweise mit elementaren Funktionen berechnen (s. Gl. (13.37) – (13.45)).

Für $v = K'/2$ ergibt sich ein Kreis in der z -Ebene. Sein Mittelpunkt ist $z = 0$ und sein Radius $r = 1/\sqrt{k}$. Durch Spiegelung an diesem Kreis geht Punkt D über in Punkt C .

Für $u = K/2$ ergibt sich kein Kreis, für keinen Wert von $k \neq 0$ (Bild 11.3).

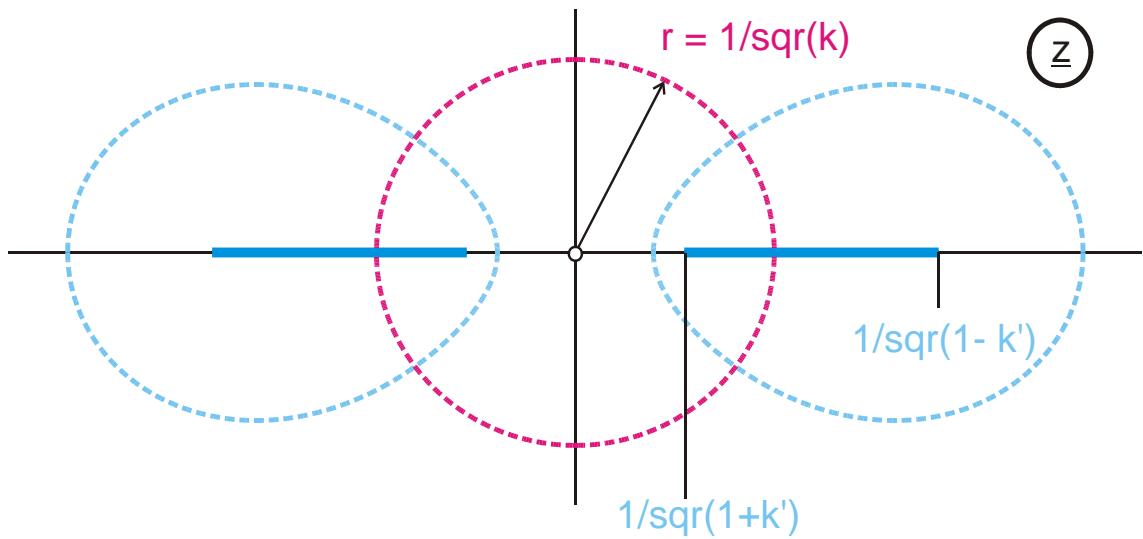


Bild 11.3: Abbildung von $u=K/2$ (blau) und $v=K'/2$ (rot) bei $\underline{z} = \text{sn}(\underline{w}, k)$ mit $k=0,3$

Grenzfälle:

Mit größer werdendem Modul k wächst die Rechteckseite K und K' nimmt ab. Der Streifen in der z -Ebene wird immer schmaler. Für $k=1$ wird die Streifenbreite zu 0. Der Streifenleiter geht über in eine Linienladung. Das Rechteck in der w -Ebene wird zu einem Halbstreifen, der sich bis ins Unendliche erstreckt.

$$\text{sn}(\underline{w}, k=1) = \tanh \underline{w} \quad (9)$$

$$K(k=1) = \infty \quad (10)$$

$$K'(k=1) = \pi/2 \quad (11)$$

Für $k = 0$ beginnt der Streifen bei $x = 1$ und erstreckt sich bis nach unendlich. Das Rechteck in der w -Ebene wird unendlich hoch.

$$\operatorname{sn}(\underline{w}, k = 0) = \sin \underline{w} \quad (12)$$

$$K(k = 0) = \pi/2 \quad (13)$$

$$K'(k = 0) = \infty \quad (14)$$

Damit wird ersichtlich, dass die elliptischen Funktionen eine Erweiterung bzw. Verallgemeinerung der trigonometrischen sowie der hyperbolischen Funktionen darstellen.

11.3 Die Funktionen $\operatorname{cn}(\underline{w}, k)$ und $\operatorname{dn}(\underline{w}, k)$

Die elliptischen Funktionen $\operatorname{cn}(\underline{w}, k)$ und $\operatorname{dn}(\underline{w}, k)$ (ebenfalls als einzelne Buchstaben ausgesprochen), sind aus der Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ abgeleitet. Entsprechend Kapitel 6 handelt es sich um Folgeabbildungen.

Es ergeben sich damit also keine grundsätzlich neuartigen Abbildungen, sondern sie dienen nur der Verkürzung der Formelschreibweise.

Aus der Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ ergibt sich analog zu $\sin \underline{w}$ und $\cos \underline{w}$ mit

$$\cos \underline{w} = \sqrt{1 - \sin^2 \underline{w}} \text{ aus}$$

$$\operatorname{sn}^2(\underline{w}, k) + \operatorname{cn}^2(\underline{w}, k) = 1 \quad (15)$$

$$\operatorname{cn}(\underline{w}, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\underline{w}, k)} \quad (16)$$

sowie aus

$$k^2 \operatorname{sn}^2(\underline{w}, k) + \operatorname{dn}^2(\underline{w}, k) = 1 \quad (17)$$

$$\operatorname{dn}(\underline{w}, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\underline{w}, k)} . \quad (18)$$

$\operatorname{cn}(\underline{w}, k)$ ist periodisch mit $4K, j4K', 2K + j2K'$

$\operatorname{dn}(\underline{w}, k)$ ist periodisch mit $2K, j4K', 4K + j4K'$.

Bild 11.4 zeigt die durch $\operatorname{cn}(\underline{w}, k)$ erzeugte Abbildung.

Im Unterschied zu $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ sind die Rechtecke in der w -Ebene nicht genauso angeordnet wie die Quadranten in der z -Ebene, auf die sie abgebildet werden. Der Punkt $z = 0$ liegt bei $\underline{w} = K$ (Punkt D). Dementsprechend werden die vier Quadranten der z -Ebene, auf diejenigen Rechtecke in der w -Ebene abgebildet, die den Punkt D gemeinsam haben. Entsprechend den Regeln der konformen Abbildung im gleichen Umlaufsinn (Bild 11.5c).

Die Abbildung durch $\operatorname{dn}(\underline{w}, k)$ (Bild 11.5) ergibt die gleiche Elektrodenanordnung wie die Funktion $\operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ (s. Gl. (35)). Auch hier ergibt sich ein Kreis, allerdings für $u = K/2$. Der Punkt D, an diesem Kreis gespiegelt, geht über in den Punkt A.

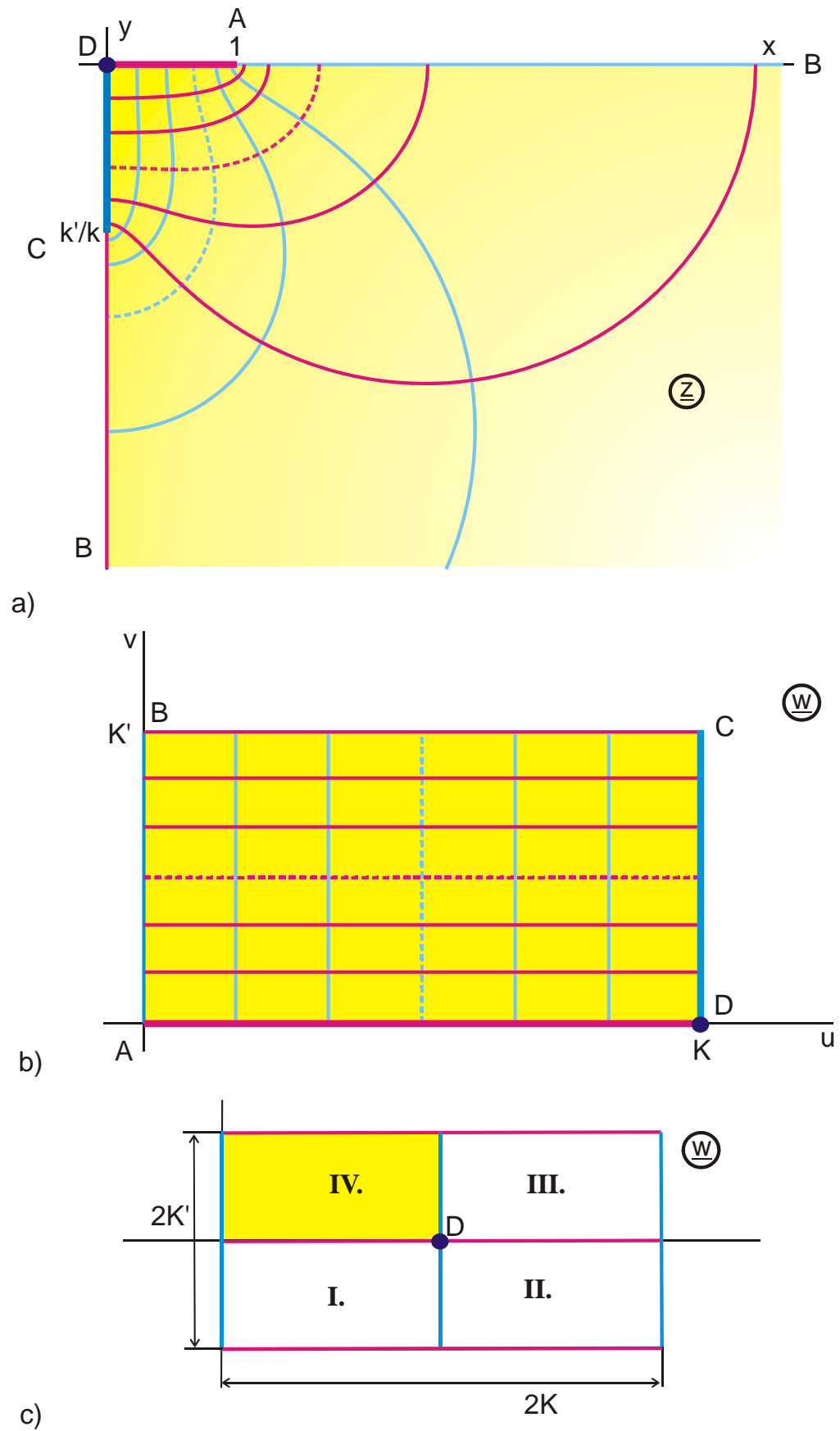


Bild 11.4: Abbildung mit der elliptischen Funktion $\underline{z} = \text{cn}(\underline{w}, k)$ mit $k=0,6$

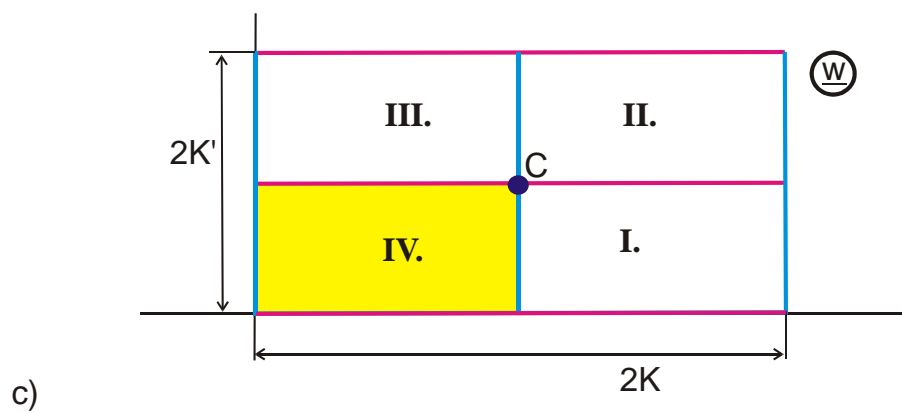
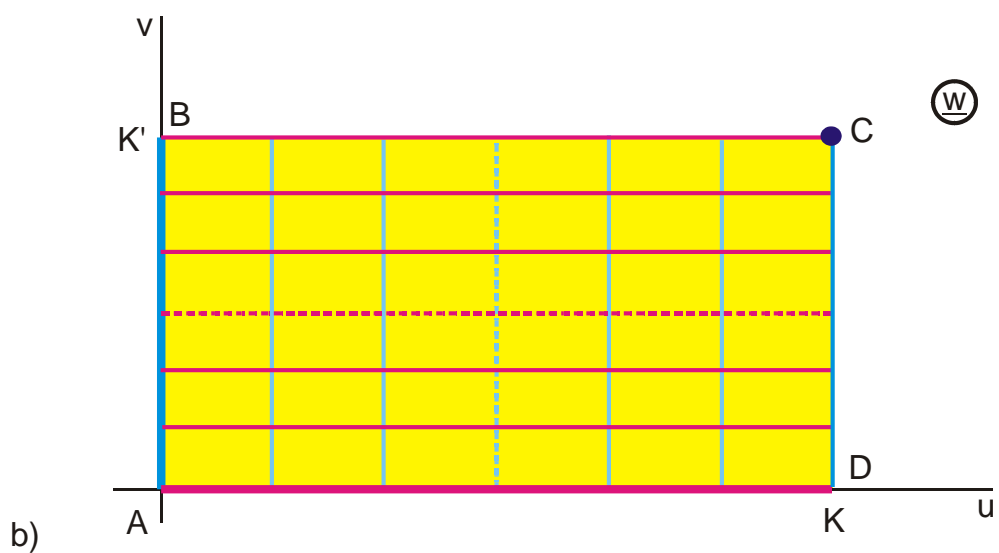
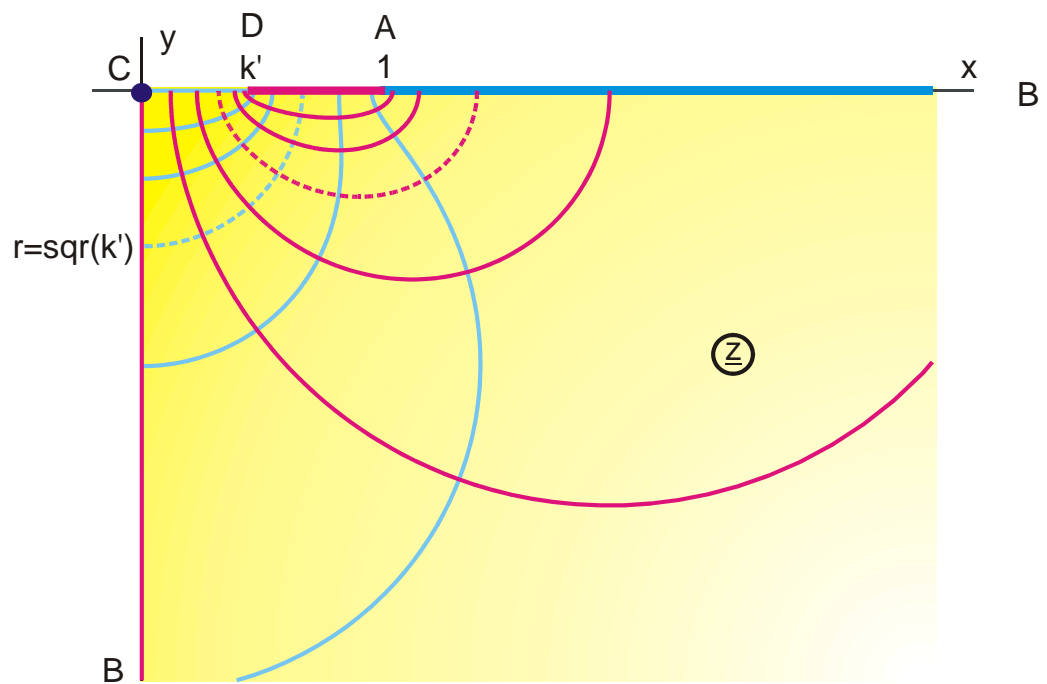


Bild 11.5: Abbildung mit der elliptischen Funktion $\underline{z} = \text{dn}(\underline{w}, k)$ mit $k=0,9$

Grenzwerte:

$$\operatorname{cn}(\underline{w}, k = 0) = \cos \underline{w} \quad (19)$$

$$\operatorname{cn}(\underline{w}, k = 1) = 1/\cosh \underline{w} \quad (20)$$

$$\operatorname{dn}(\underline{w}, k = 0) = 1 \quad (21)$$

$$\operatorname{dn}(\underline{w}, k = 1) = 1/\cosh \underline{w} \quad (22)$$

Auch hier wird der Nullpunkt der z -Ebene nicht auf den Nullpunkt der w -Ebene abgebildet. Punkt C wird nach $K + jK'$ abgebildet. Die vier Quadranten der z -Ebene verteilen sich im Gegenuhrzeigersinn um diesen Punkt herum (Bild 11.6c).

11.4 Einige Rechenregeln

$$\operatorname{sn}(-\underline{w}, k) = -\operatorname{sn}(\underline{w}, k) \quad (23)$$

$$\operatorname{cn}(-\underline{w}, k) = \operatorname{cn}(\underline{w}, k) \quad (24)$$

$$\operatorname{dn}(-\underline{w}, k) = \operatorname{dn}(\underline{w}, k) \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{w}} (\operatorname{sn}(\underline{w}, k)) = \operatorname{cn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{dn}(\underline{w}, k) \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{w}} (\operatorname{cn}(\underline{w}, k)) = -\operatorname{sn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{dn}(\underline{w}, k) \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{w}} (\operatorname{dn}(\underline{w}, k)) = -k^2 \cdot \operatorname{sn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{cn}(\underline{w}, k) \quad (28)$$

$$\int \operatorname{sn}(\underline{w}, k) d\underline{w} = \frac{1}{k} \ell n \left(\operatorname{dn}(\underline{w}, k) - \frac{1}{k} \operatorname{cn}(\underline{w}, k) \right) \quad (29)$$

$$\int \operatorname{cn}(\underline{w}, k) d\underline{w} = \frac{1}{k} \arccos \operatorname{dn}(\underline{w}, k) \quad (30)$$

$$\int \operatorname{dn}(\underline{w}, k) d\underline{w} = \arcsin \operatorname{sn}(\underline{w}, k) \quad (31)$$

$$\frac{\operatorname{sn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{dn}(\underline{w}, k)}{\operatorname{cn}(\underline{w}, k)} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}(2\underline{w}, k)}{1 + \operatorname{cn}(2\underline{w}, k)}} = -\frac{\partial}{\partial \underline{w}} (\ell n \operatorname{cn}(\underline{w}, k)) \quad (32)$$

$$\frac{\operatorname{sn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{cn}(\underline{w}, k)}{\operatorname{dn}(\underline{w}, k)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn}(2\underline{w}, k)}{1 + \operatorname{dn}(2\underline{w}, k)}} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial \underline{w}} (\ell n \operatorname{dn}(\underline{w}, k)) \quad (33)$$

$$\frac{\operatorname{cn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{dn}(\underline{w}, k)}{\operatorname{sn}(\underline{w}, k)} = \frac{\operatorname{cn}(2\underline{w}, k) + \operatorname{dn}(2\underline{w}, k)}{\operatorname{sn}(2\underline{w}, k)} = \frac{\partial}{\partial \underline{w}} (\ell n \operatorname{sn}(\underline{w}, k)) \quad (34)$$

$$\operatorname{dn}(\underline{w}, k) = k' \operatorname{sn}(j\underline{w} + K'(k) + jK(k), k') \quad (35)$$

$$\operatorname{sn}[\underline{w} + jK'(k), k] = \frac{1}{k \operatorname{sn}(\underline{w}, k)} \quad (36)$$

$$\operatorname{sn}(jy, k) = j \frac{\operatorname{sn}(y, k')}{\operatorname{cn}(y, k')} \quad (37)$$

$$k = \frac{1}{\operatorname{sn}[K(k) + jK'(k), k]} \quad (38)$$

$$k' = \operatorname{dn}[K(k), k] \quad (39)$$

Weitere Rechenregeln und Eigenschaften der elliptischen Funktionen sind in den beiden folgenden Kapiteln über elliptische Integrale und über Theta-Funktionen angegeben. Umfassende Rechenregeln in [2].

12. Elliptische Integrale

Zunächst wird wieder durch Vergleich mit den trigonometrischen Funktionen versucht, mit den elliptischen Integralen vertraut zu werden.

Die Umkehrfunktion der Funktion $t = \sin \varphi$ ist die Funktion

$$\varphi = \arcsin t = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (1)$$

Die Funktion $\arcsin t$ ist über ein Integral definiert. “Exakte“ Zahlenwerte sowohl für $\sin \varphi$ als auch für $\arcsin t$ lassen sich nicht elementar, sondern nur als Summe einer unendlichen Reihe berechnen.

Die Umkehrfunktion der Funktion $t = \operatorname{sn}(u, k)$ ist die Funktion

$$u = F_a(t, k) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (2)$$

$F_a(t,k)$ wird elliptisches Integral 1. Art genannt. Die hier benutzte Darstellung ist die algebraische Form, deshalb der Index a . Zahlenwerte für $\operatorname{sn}(u,k)$ und $F_a(t,k)$ lassen sich nur als Summe einer unendlichen Reihe berechnen.

Integrale der Form

$$\int R(x,y)dx \quad (3)$$

bei denen $R(x,y)$ eine rationale Funktion von x und y ist und y die Wurzel aus einem Polynom 3. oder 4. Ordnung in x ohne mehrfache Nullstellen ist, heißen elliptische Integrale. In den Sonderfällen, in denen sich das Integral durch elementare Funktionen darstellen läßt, heißt es pseudoelliptisch.

Jedes elliptische Integral läßt sich darstellen durch drei Grundformen, das elliptische Integral 1. Art, 2. Art und 3. Art sowie durch zusätzliche Integrale rationaler Funktionen. Ausführliche Integraltafeln sind in [18] und [21] enthalten.

Der Name “elliptisch“ stammt daher, daß bei der Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse das elliptische Integral 2. Art auftritt. Mit den Bezeichnungen in Bild 12.1 gilt, wenn die Ellipse gegeben ist mit $x = a \sin \varphi$ und $y = b \cos \varphi$:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (4)$$

Damit wird die Bogenlänge s :

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad (5)$$

Mit der Abkürzung $k = \sqrt{1 - b^2 / a^2}$ ergibt sich

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad (6)$$

$$s = a E_t(\varphi, k) \quad (7)$$

$E_t(\varphi, k)$ ist das elliptische Integral 2. Art in trigonometrischer Form.

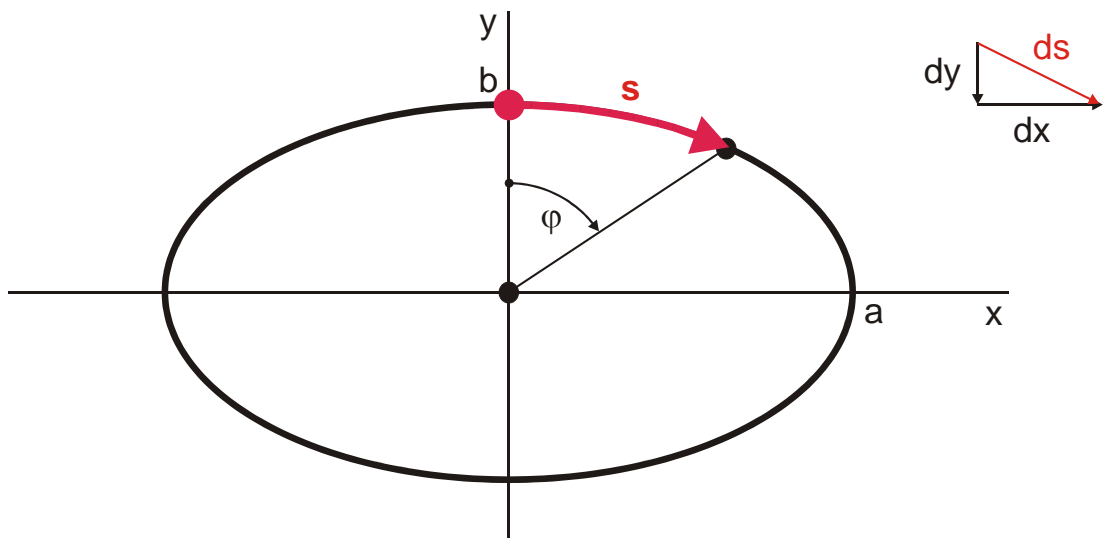


Bild 12.1: Berechnung der Bogenlänge s einer Ellipse

Auch dieses Beispiel zeigt die Verwandtschaft zu den trigonometrischen Funktionen. Bei diesen lassen sich die Funktionswerte an einem Kreis geometrisch definieren.

Elliptische Integrale treten bei der Berechnung konformer Abbildungen häufig auf. Entsprechend Kapitel 4 ergibt bei der Polygonabbildung jeder rechte Winkel einen Term im Integranden der Abbildungsfunktion, entsprechend

$$\underline{z} = \int_0^{\underline{w}} \dots (\underline{w} - \underline{w}_0)^{\pm 1/2} \dots d\underline{w} \quad (8)$$

Somit enthalten die Abbildungsfunktionen für polygonale Bereiche mit mehr als zwei rechten Winkeln stets elliptische (oder pseudoelliptische) Integrale.

12.1 Das elliptische Integral 1. Art

In Mathematik-Büchern und mathematischen Formelsammlungen [2, 11 - 15, 18] wird das elliptische Integral 1. Art mit dem Buchstaben F gekennzeichnet. Die unterschiedlichen Formen des elliptischen Integrals 1. Art werden dadurch gekennzeichnet, daß jeder Form ein bestimmter Buchstabe für die Variable fest zugeordnet ist. Die algebraische Form ist definiert durch:

$$F(t, k) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (9)$$

Mit der Substitution $t = \sin \varphi$ wird daraus die trigonometrische Form

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (10)$$

Bei den Integralen 2. Art und 3. Art kommt mit der Substitution $t = \operatorname{sn}(u, k)$ noch eine weitere Darstellungsform hinzu.

Da sich in der praktischen Anwendung dieser Funktionen eine feste Variablenbenennung mit t , φ und u nicht aufrechterhalten läßt, war die Folge, daß elliptische Integrale als exotisch gelten, und daß sich ihre Anwendung für den normalen Anwender aus dem ingenieurwissenschaftlichen Bereich aus Zeitgründen verbot.

Zur Vermeidung dieser Bezeichnungsvielfalt (die Vielfalt der unterschiedlichen Bezeichnungen bei verschiedenen Autoren wurde bisher noch nicht einmal erwähnt) werden im folgenden Indizes eingeführt, durch die die verschiedenen Darstellungsformen der elliptischen Integrale eindeutig unterscheidbar werden. Für das elliptische Integral 1. Art gilt:

Die algebraische Form:

$$F_a(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{\sqrt{(1 - \underline{w}^2)(1 - k^2 \underline{w}^2)}} \quad (11)$$

Die trigonometrische Form:

$$F_t(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \underline{w}}} = F(\underline{w}, k) \quad (12)$$

mit den Umrechnungsformeln:

$$F_t(\underline{w}, k) = F_a(\sin \underline{w}, k) \quad (13)$$

$$F_a(\underline{w}, k) = F_t(\arcsin \underline{w}, k) \quad (14)$$

Außerdem gilt:

$$F_a(\underline{w}, k) = \underline{z} \Rightarrow \underline{w} = \operatorname{sn}(\underline{z}, k) \quad (15)$$

$$F_t(\underline{w}, k) = \underline{z} \Rightarrow \underline{w} = \arcsin(\operatorname{sn}(\underline{z}, k)) \quad (16)$$

Für die Integrationsobergrenzen $\underline{w} = 1$ bzw. $\underline{w} = \pi/2$ ergeben sich die vollständigen elliptischen Integrale 1. Art.

$$K(k) = F_a(\underline{w} = 1, k) = \int_0^1 \frac{d\underline{w}}{\sqrt{(1 - \underline{w}^2)(1 - k^2 \underline{w}^2)}} \quad (17)$$

$$K(k) = F_t(\underline{w} = \pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\underline{w}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \underline{w}}} \quad (18)$$

Für den komplementären Modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ gilt:

$$K'(k) = K(k') = F_a(\underline{w} = 1, k') \quad (19)$$

$$K'(k) = K(k') = F_t(\underline{w} = \pi / 2, k') \quad (20)$$

$K(k)$ und $K'(k)$, die vollständigen elliptischen Integrale 1. Art, sind die Seitenlängen des Rechtecks in der Abbildung mit der Funktion $\underline{z} = \text{sn}(\underline{w}, k)$ in Bild 11.2. $K(k)$, $K'(k)$, k und K/K' lassen sich näherungsweise mit elementaren Funktionen berechnen (s. Gl. (13.37) – (13.45)). Für $k = 1/\sqrt{2}$ wird aus dem Rechteck ein Quadrat und es gilt $k = k'$

$$\text{und } K(k) = K'(k) = \frac{2\pi}{(1 + 2^{-1/4})^2} = 1,854.$$

Anstelle des Moduls k mit

$$k^2 + k'^2 = 1 \quad (21)$$

kann auch der Parameter m benutzt werden.

$$m = k^2 \quad (22)$$

$$m + m' = 1 \quad (23)$$

Weiterhin ist noch der Modulwinkel α in Gebrauch:

$$k = \sin \alpha \quad (24)$$

$$k' = \cos \alpha \quad (25)$$

Bild 12.2 zeigt die zum elliptischen Integral 1. Art $F_t(\underline{w}, k)$ gehörige Abbildung. Ein Parallelstreifen der Breite π in der w -Ebene wird auf ein Rechteck mit der Breite $2K$ und der Höhe $2K'$ abgebildet. Die Gerade \overline{CD} wird im Punkt C um 90° gedreht und der Punkt ∞ (Punkt D) kommt nach jK' . Da der Parallelstreifen unendlich viele Linien $v = \text{const}$ enthält, ergibt sich in der z -Ebene im Punkt D eine Linienladung.

Die Abbildung ist in beiden Ebenen symmetrisch zu den Achsen. Der Nullpunkt A wird wieder auf den Nullpunkt abgebildet. Die Zuordnung der Quadranten bleibt erhalten, d.h. der Halbstreifen im III. Quadranten der w -Ebene wird auf das Rechteck im III. Quadranten der z -Ebene abgebildet, usw.

Da die Variable \underline{w} in Gl. (12) nur als Argument der Sinus-Funktion auftritt, ergibt sich aus $\sin^2 \underline{w}$ eine Periodizität mit π .

Da die Integration von 0 bis $\pi/2$ den Wert K ergibt und jeder weitere Integrationsteil von \underline{w} bis $\underline{w} + \pi/2$ ebenfalls K ergibt, werden die in der w -Ebene um $\pm n \cdot \pi$ versetzten Parallelstreifen jeweils auf die entsprechend um $\pm n \cdot 2K$ versetzten Rechteckbereiche abgebildet (Bild 12.2c).

$$F_t(\underline{w} \pm n\pi, k) = \pm n2K + F_t(\underline{w}, k) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

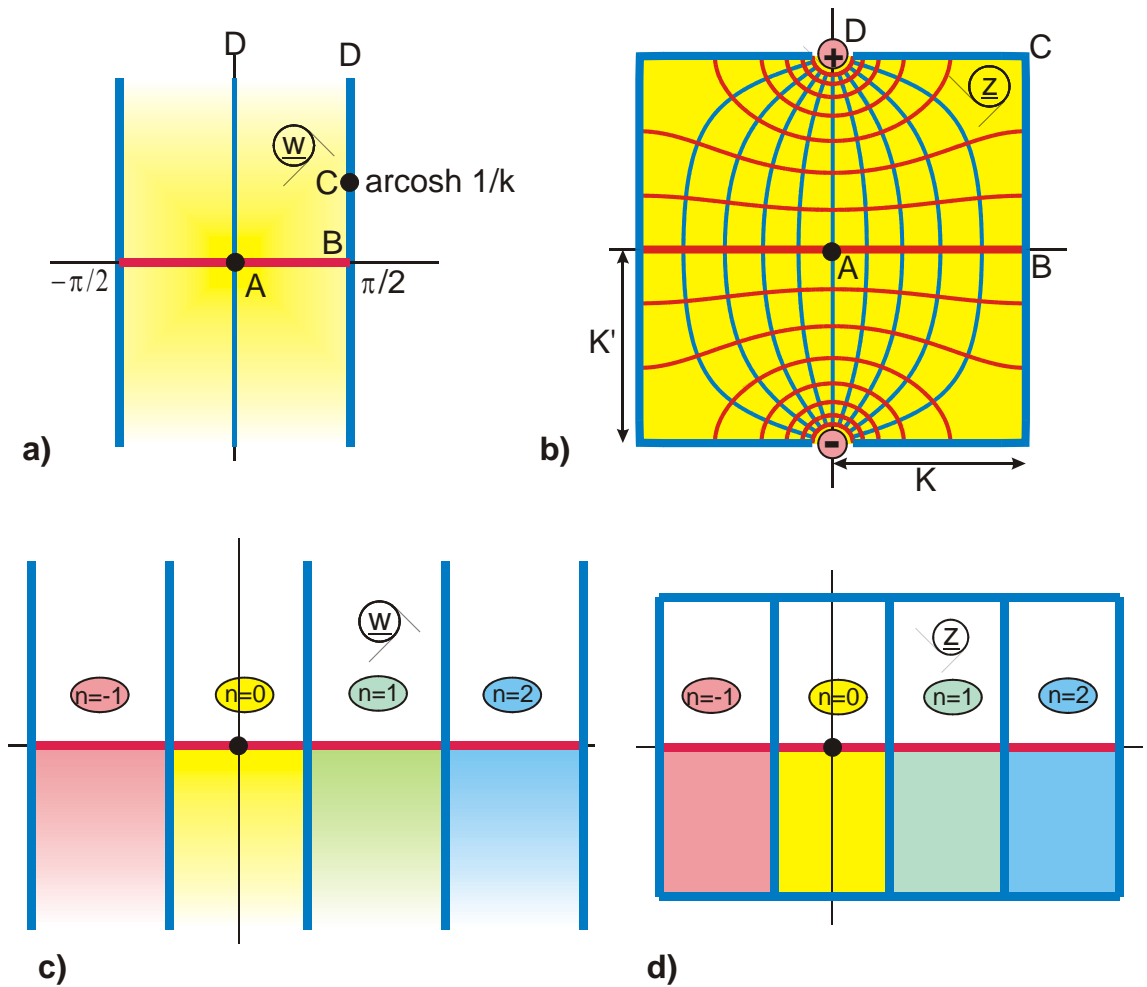


Bild 12.2: Die Abbildung $z = F_t(w, k)$ für $0 \leq k \leq 1$, Abb. I 1.2

Grenzfälle:

Für $k \rightarrow 0$ wird K' immer größer und Punkt D wandert nach ∞ . Im Grenzfalle $k=0$ wird $K = \pi/2$, $K'=\infty$ und der Parallelstreifen aus der w -Ebene wird auf einen identischen Parallelstreifen in der z -Ebene abgebildet (Bild 12.3a).

$$F_t(\underline{w}, k = 0) = \underline{w} \quad (27)$$

Für $k \rightarrow 1$ wird K immer größer und Punkt B wandert nach ∞ . Im Grenzfalle $k=1$ wird $K = \infty$, $K'=\pi/2$ und das Rechteck entartet zum Parallelstreifen.

$$F_t(\underline{w}, k=1) = \ln \tan(\underline{w} / 2 + \pi / 4) = \operatorname{ar} \tanh(\sin \underline{w}) \quad (28)$$

Wegen $F_a(\underline{w}, k=1) = F_t(\arcsin \underline{w}, k)$ ergibt sich die algebraische Form des elliptischen Integrals 1. Art entsprechend Kapitel 5 über eine Vorabbildung mit $\arcsin \underline{w}$. Daraus folgt, daß die Geometrie der Berandung in der z -Ebene, wie in Bild 12.2 angegeben, erhalten bleibt. Nur die Potentialverteilung längs des Randes ändert sich. Bild 12.4 zeigt die Abbildung durch $F_a(\underline{w}, k)$. Die gesamte w -Ebene wird auf ein Rechteck mit den Seiten $2K$ und $2K'$ abgebildet. Man erkennt unmittelbar den Zusammenhang mit der Umkehrfunktion $\underline{z} = \operatorname{sn}(\underline{w}, k)$ in Bild 6.2.

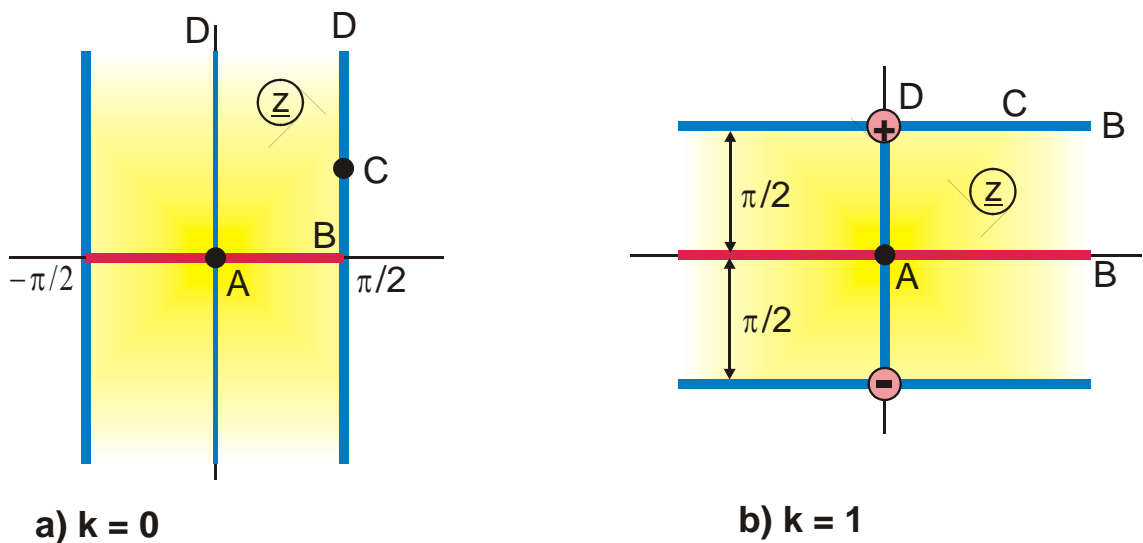


Bild 12.3: Grenzfälle der Abbildung $z = F_t(w, k)$

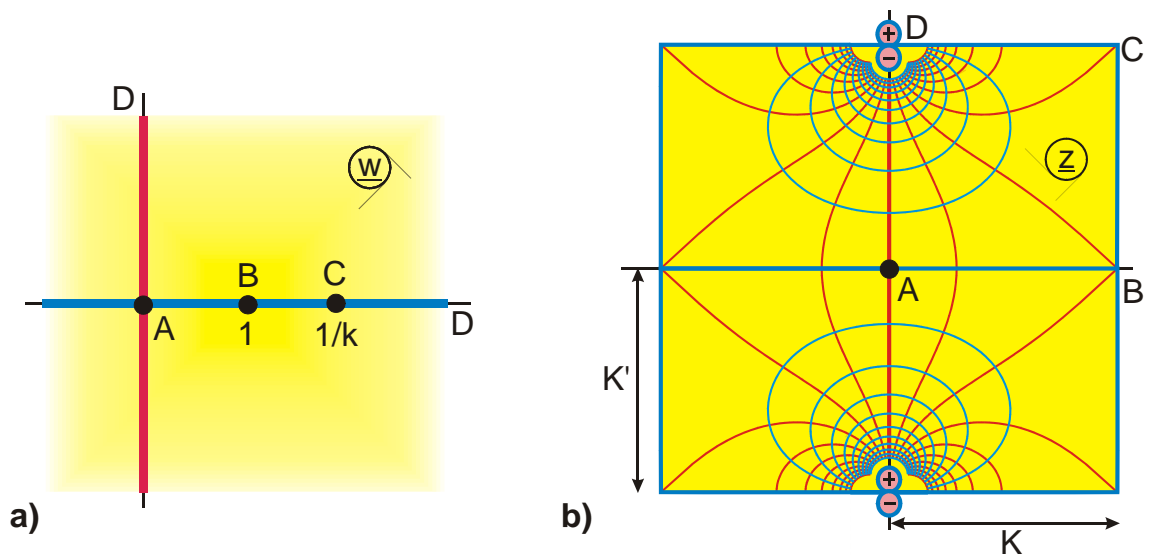


Bild 12.4: Die Abbildung $z = F_a(w, k)$ für $0 \leq k \leq 1$, Abb. Q 4

Man beachte den Unterschied: Bildet man entsprechend Bild 12.4 ein kartesisches Netz der w -Ebene mit unendlich vielen Potentiallinien und unendlich vielen Feldlinien auf ein endliches Rechteck in der z -Ebene ab, so ergibt sich ein Liniendipol im Punkt D der z -Ebene.

Bildet man entsprechend Bild 11.2 das kartesische Netz in einem endlichen Rechteck der w -Ebene auf die gesamte z -Ebene ab, so ergibt sich ein Feldbild mit endlich vielen Potential- und Feldlinien.

Weitere Rechenregeln:

$$F_t(-\underline{w}, k) = -F_t(\underline{w}, k) \quad (29)$$

$$F_a(\operatorname{sn} \underline{w}, k) = \underline{w} \quad (30)$$

$$\frac{d}{d\underline{w}} F_a(\underline{w}, k) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \underline{w}^2)(1 - k^2 \underline{w}^2)}} \quad (31)$$

$$\frac{d}{d\underline{w}} F_t(\underline{w}, k) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \underline{w}^2}} \quad (32)$$

Im Unterschied zu den Jakobischen elliptischen Funktionen, bei denen der Modul k üblicherweise eingeschränkt ist auf eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, kann der Modul k bei den elliptischen Integralen grundsätzlich eine beliebige, komplexe Zahl sein.

Im Fall des elliptischen Integrals 1. Art gilt:

Modul \underline{k} imaginär bzw. $k' > 1$:

$$k' > 1, \text{ reell} \Rightarrow \underline{k} = \sqrt{1 - k'^2} = j\sqrt{k'^2 - 1} = jk_0 \quad (33)$$

$$\underline{k}^2 = -k_0^2 \quad k' = \sqrt{1 + k_0^2} \quad (34)$$

$$F_t(\underline{w}, jk_0) = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2 \underline{w}}} \quad (35)$$

Der Funktionswert für $k' > 1$ kann mit dem Unterprogramm Cet ($u, v, k', 1, 1, \text{Re}, \text{Im}$) berechnet werden, das für $0 \leq k' < \infty$ anwendbar ist. Alternativ kann das Unterprogramm Cfa ($u, v, k, 1, 1, \text{Re}, \text{Im}$), das nur für $0 \leq k' \leq 1$ anwendbar ist, unter Zuhilfenahme folgender Umrechnungsformel benutzt werden:

$$F_t(\underline{w}, jk_0) = \frac{1}{k'} F_a \left(\frac{k' \sin \underline{w}}{\sqrt{1 + k_0^2 \sin^2 \underline{w}}}, \frac{k_0}{k'} \right) \quad (36)$$

Außerdem gilt:

$$F_t(\underline{w}, jk_0) = \frac{1}{k'} \left[F_t \left(\underline{w} - \frac{\pi}{2}, k_0 / k' \right) + K(k_0 / k') \right] \quad (37)$$

Bild 12.5 zeigt die dazugehörige Abbildung. Ausgehend von Bild 12.2 mit $k' < 1$ wandert die Linienladung in der z -Ebene für $k' \rightarrow 1$ entlang der imaginären Achse nach unendlich. Für $k' > 1$ kommt sie dann parallelversetzt auf der Geraden $\underline{z} = K$ mit stetig abnehmendem Imaginärteil zurück. Vom Standpunkt der konformen Abbildung ergibt sich für $k' > 1$ keine andere Abbildung, verglichen mit den Möglichkeiten im Bereich $0 \leq k' \leq 1$.

Die Abmessungen des Rechtecks sind:

$$K(jk_0) = \frac{1}{k'} K \left(\frac{k_0}{k'} \right) \quad (38)$$

$$K'(jk_0) = \frac{1}{k'} K \left(\frac{1}{k'} \right) \quad (39)$$

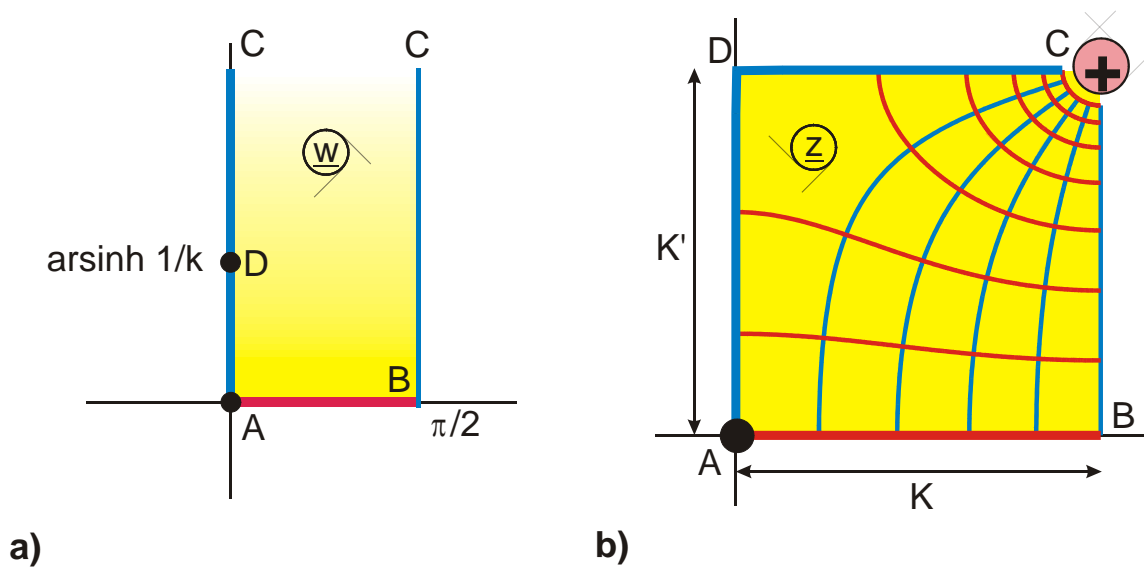


Bild 12.5: Die Abbildung $z = F_t(w, jk_0)$

Modul $k > 1$:

$$F_t(\underline{w}, k > 1) = \frac{1}{\sqrt{k}} F_a(k \sin \underline{w}, 1/k) \quad (40)$$

mit

$$K(k > 1) = \frac{1}{\sqrt{k}} K(1/k) \quad (41)$$

$$K'(k > 1) = \frac{1}{\sqrt{k}} K'(1/k) \quad (42)$$

Die Abbildung ist in Bild 12.6 dargestellt. Vergleicht man mit dem Fall $k = 1$ in Bild 12.3b, so erkennt man, daß der unendlich ferne Punkt B aus Bild 12.3b für $k > 1$ nach $K + jK'$ wandert. Die Linienquelle bleibt unverändert auf der imaginären Achse.

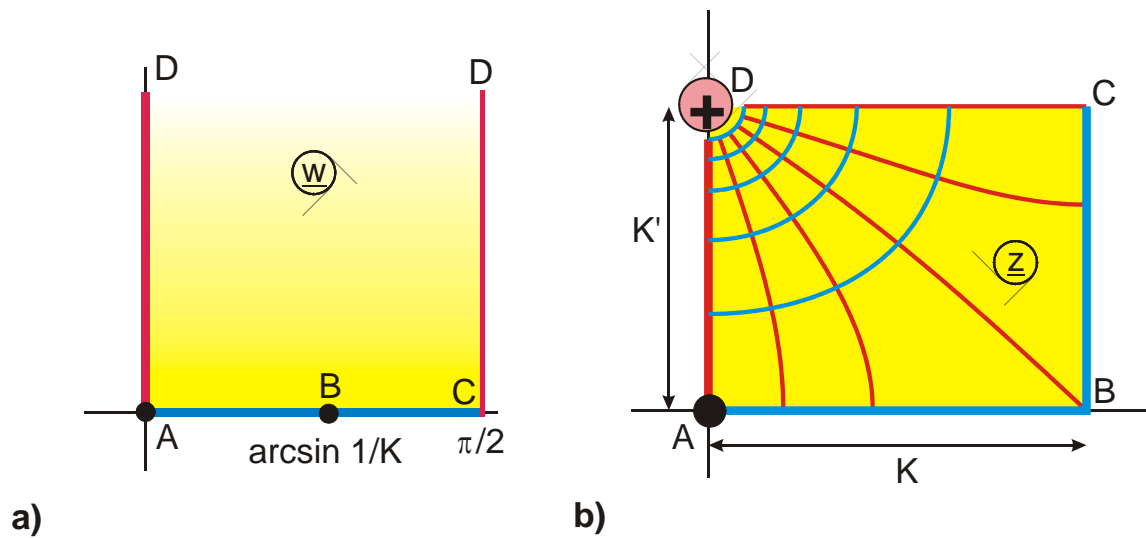


Bild 12.6: Die Abbildung $z = F_t(w, k > 1)$

12.2 Das elliptische Integral 2.Art

Das elliptische Integral 2.Art wird mit dem Buchstaben E gekennzeichnet. Die algebraische Form ist:

$$E_a(t, k) = \int_0^t \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt . \quad (43)$$

Durch Substitution der Variablen im Integranden mit $t = \sin \varphi$ erhält man daraus die trigonometrische Form

$$E_t(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi. \quad (44)$$

Wird in $E_a(t, k)$ mit $t = \operatorname{sn} u$ substituiert ergibt sich die elliptische Form

$$E_e(u, k) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(u, k) du \quad (45)$$

In allgemeiner Schreibweise, mit der komplexen Variablen \underline{w} ergibt sich die algebraische Form

$$E_a(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \sqrt{\frac{1 - k^2 \underline{w}^2}{1 - \underline{w}^2}} \, d\underline{w}, \quad (46)$$

die trigonometrische Form

$$E_t(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \underline{w}} \, d\underline{w} = E(\underline{w}, k) \quad (47)$$

und die elliptische Form

$$E_e(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \operatorname{dn}^2(\underline{w}, k) d\underline{w} . \quad (48)$$

Die drei Darstellungsformen lassen sich wie folgt ineinander umrechnen:

$$E_t(\underline{w}, k) = E_a(\sin \underline{w}, k) \quad (49)$$

$$E_a(\underline{w}, k) = E_t(\arcsin \underline{w}, k) \quad (50)$$

$$E_e(\underline{w}, k) = E_a[\operatorname{sn}(\underline{w}, k), k] \quad (51)$$

$$E_a(\underline{w}, k) = E_e[F_a(\underline{w}, k), k] \quad (52)$$

Bei der Behandlung des elliptischen Integrals 1.Art ist die elliptische Form $F_e(\underline{w}, k)$ nicht erwähnt worden, denn für diese gilt:

$$F_e(\underline{w}, k) = F_a[\operatorname{sn}(\underline{w}, k), k] = \underline{w} . \quad (53)$$

Für die Integrationsobergrenze 1 bzw. $\pi/2$ bzw. $K(k)$ ergibt sich das vollständige elliptische Integral 2.Art:

$$E(k) = E_a(\underline{w} = 1, k) = E_t\left(\underline{w} = \frac{\pi}{2}, k\right) = E_e[\underline{w} = K(k), k] \quad (54)$$

Für den komplementären Modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ergibt sich

$$E'(k) = E(k = k'). \quad (55)$$

Für die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Art gilt die Beziehung:

$$EK' + E'K - KK' = \pi / 2 \quad (56)$$

Für $k = 1 / \sqrt{2}$ ist $k = k'$ und entsprechend $E = E'$. Für $k = 0$ ist $E = \pi/2$ (siehe Gl. (58), Kreisumfang).

Das vollständige elliptische Integral 2. Art läßt sich anschaulich graphisch definieren über den Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen a und b (siehe Bild 12.1):

$$\text{Ellipsenumfang} = 4 \cdot a \cdot E(k = \sqrt{1 - b^2 / a^2}) \quad (57)$$

Normiert auf $a = 1$ und $b = k$ wird daraus:

$$\text{Ellipsenumfang} = 4 E(k') \quad (58)$$

k ist die numerische Exzentrizität der Ellipse. Das Auftreten dieses Integrals bei der Berechnung der Bogenlänge bzw. des Umfangs einer Ellipse hat den elliptischen Integralen und ihren Umkehrfunktionen, den elliptischen Funktionen, ihren Namen gegeben.

Bild 12.7 zeigt die zu $E_t(\underline{w}, k)$ gehörige Abbildung. Ein Parallelstreifen in der w -Ebene wird auf den in der z -Ebene dargestellten Bereich abgebildet. Anschaulich ausgedrückt wird die rechte Berandung des Parallelstreifens im Punkt D um 90° nach außen abgewinkelt.

Die nicht dargestellte linke Halbebene kann spiegelbildlich ergänzt werden.

$$E_t(-\underline{w}, k) = -E_t(\underline{w}, k) \quad (59)$$

$E_t(\underline{w}, k)$ ist genauso wie $\sin^2 \underline{w}$ periodisch mit der Periode π . Alle um $\pm n\pi$ in der w -Ebene verschobenen Parallelstreifen ergeben dieselbe Abbildung in der z -Ebene.

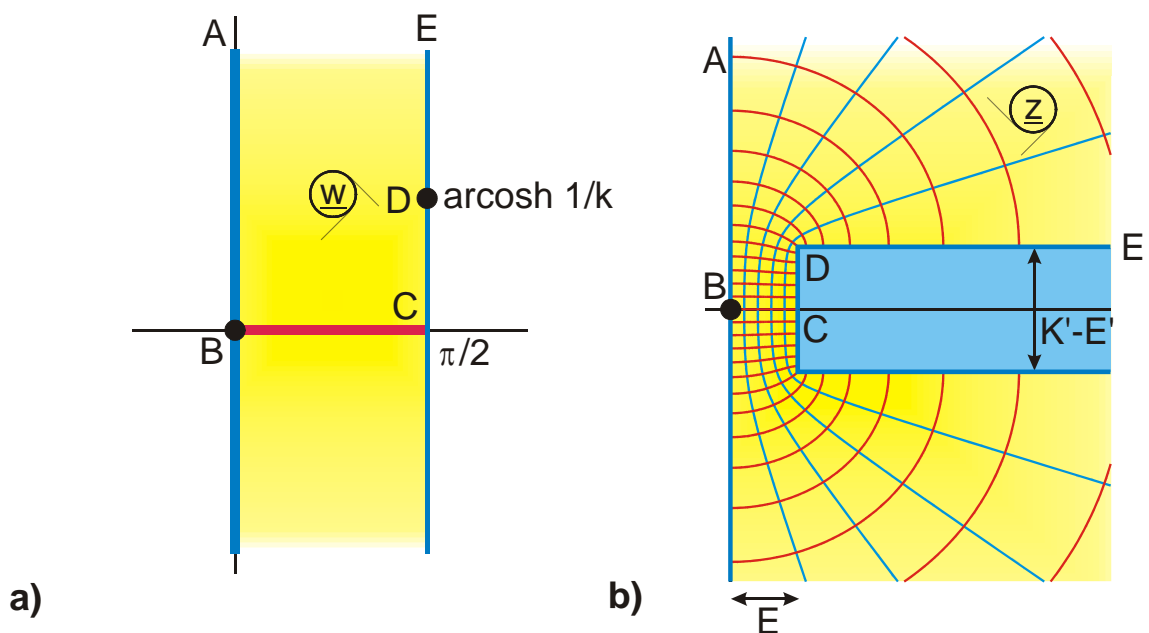


Bild 12.7: Die Abbildung $z = E_t(w, k)$ für $0 \leq k \leq 1$, Abb. C 3.1

Grenzfälle:

Für $k \rightarrow 1$ wird die Breite des Halbstreifens in der z -Ebene immer schmaler. Im Grenz-

fall $k = 1$ wird $K'(1) - E'(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ und der Punkt D stimmt mit Punkt C überein.

$$E_t(\underline{w}, k = 1) = \sin \underline{w} \quad (60)$$

Mit kleiner werdendem k wird der Halbstreifen immer breiter. Für $k = 0$ wird $K'(0) = \infty$ und $E'(0) = 1$. Punkt D wandert in der z -Ebene nach ∞ (Bild 12.8b).

$$E_t(\underline{w}, k = 0) = \underline{w} \quad (61)$$

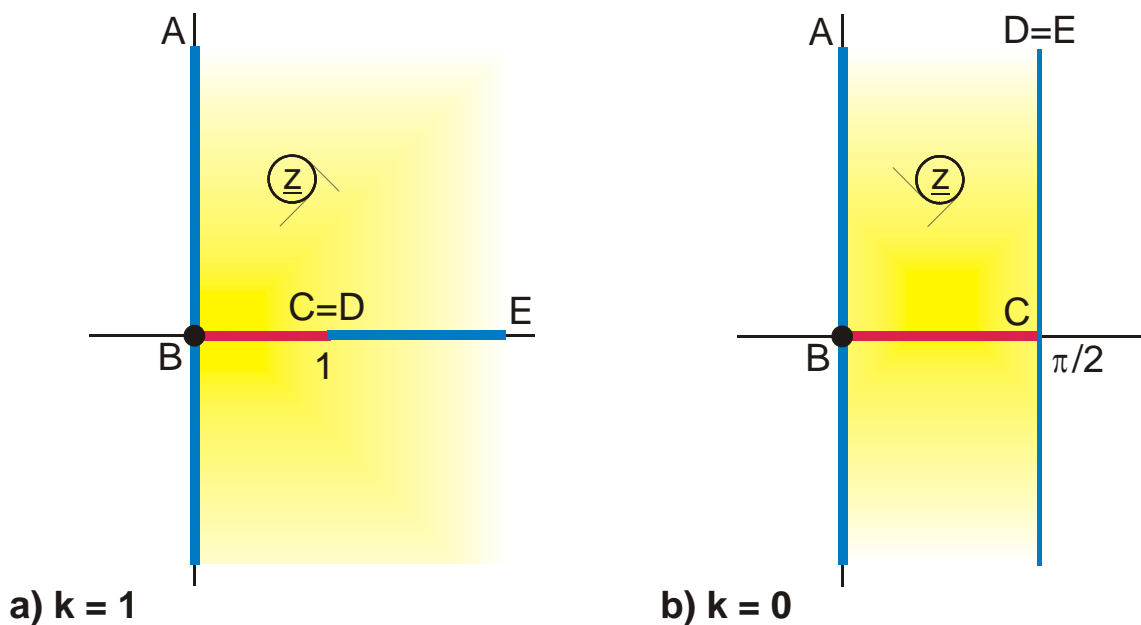


Bild 12.8: Grenzfälle der Abbildung $z = E_t(w, k)$

Da sich $E_t(z, k)$ von $E_a(z, k)$ nur durch die Vorabbildung mit der Sinusfunktion unterscheidet, haben E_a und E_t in der z -Ebene identische Berandungen (Bild 12.9b). Nur die Potentialverteilung entlang des Randes ist unterschiedlich.

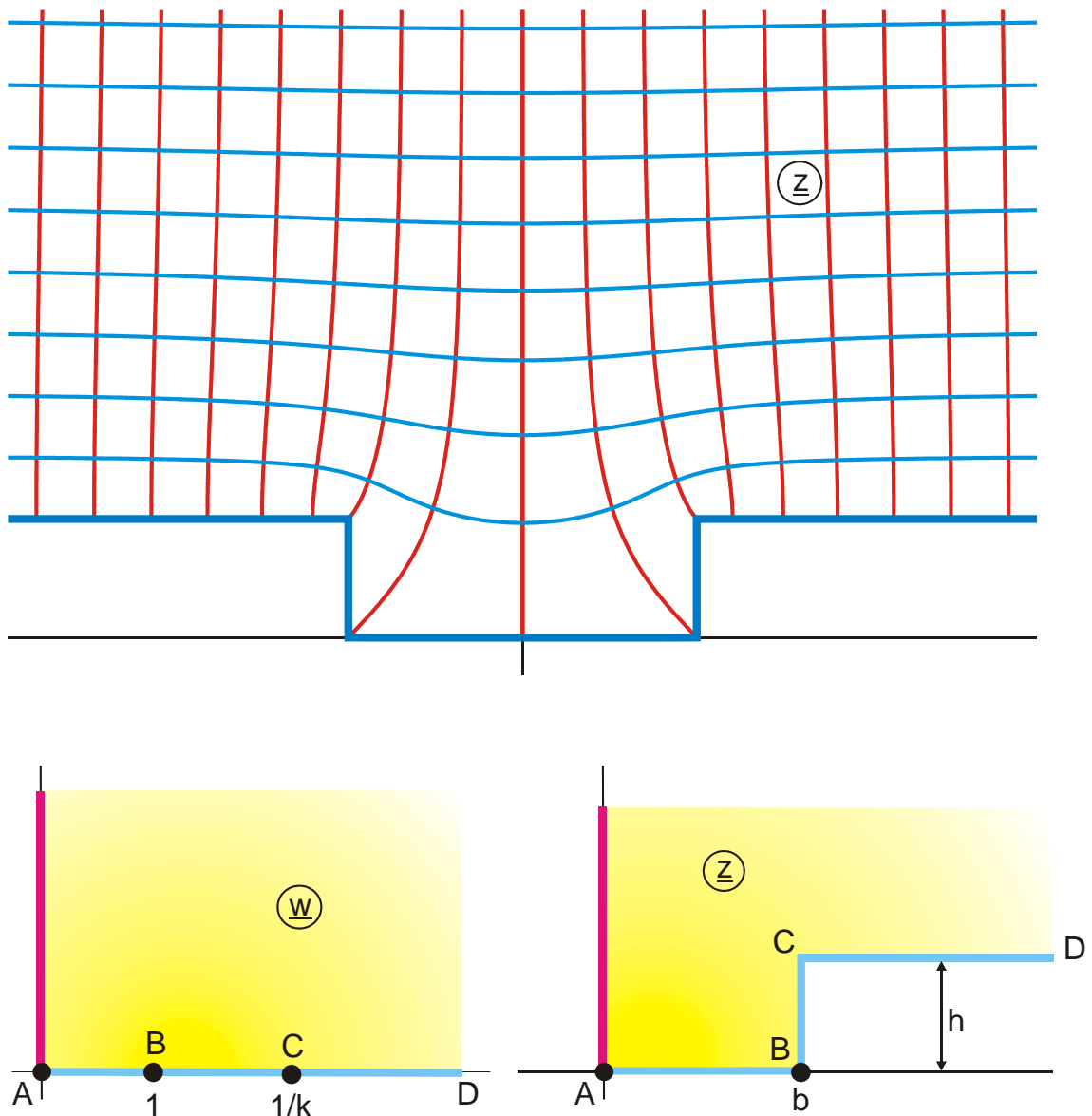


Bild 12.9: Die Abbildung $z = E_a(w, k)$ für $0 \leq k \leq 1$, Abb. A 10

$$b = E(k), h = K'(k) - E'(k)$$

Für die Grenzfälle $k = 1$ und $k = 0$ gilt dementsprechend das gleiche

$$E_a(\underline{w}, k = 1) = \underline{w} \quad (62)$$

$$E_a(\underline{w}, k = 0) = \arcsin \underline{w} \quad (63)$$

Bild 12.10 zeigt die Abbildung durch $E_e(\underline{w}, k)$ für den I. Quadranten der w -Ebene. Für die Grenzfälle $k = 1$ und $k = 0$ gilt wiederum Bild 12.8 mit entsprechend geänderter Potentialverteilung (die in Bild 12.8 und Bild 12.10 gewählte Zuordnung von Potentiallinien und Feldlinien ist willkürlich und kann auch vertauscht werden).

$$E_e(\underline{w}, k = 1) = \tanh \underline{w} \quad (64)$$

$$E_e(\underline{w}, k = 0) = \underline{w} \quad (65)$$

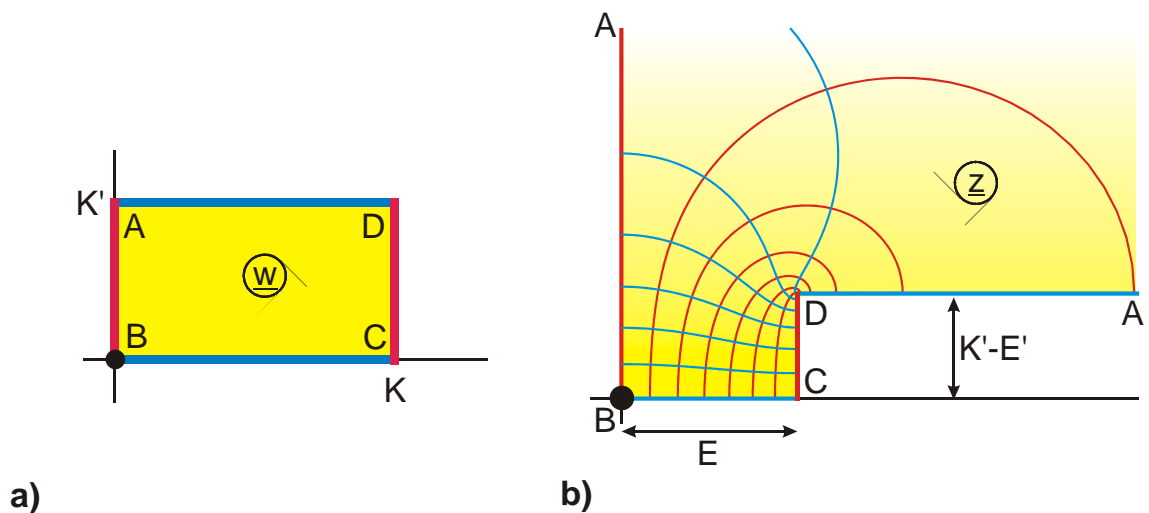


Bild 12.10: Die Abbildung $z = E_e(w, k)$ für $0 \leq k \leq 1$, Abb. U 5

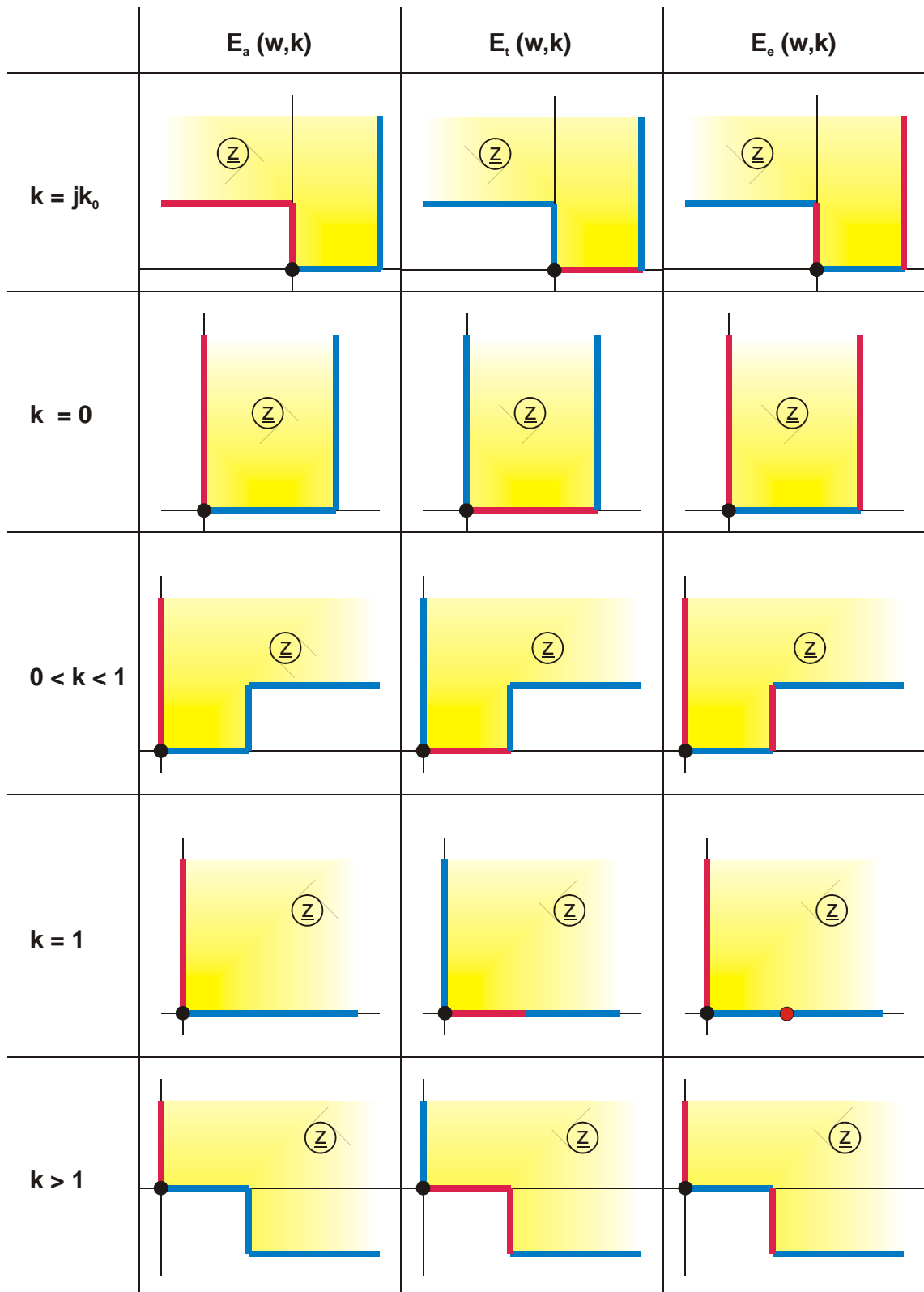


Tabelle 12.1: Übersicht über das elliptische Integral 2. Art

12.3 Die Jacobische Zeta-Funktion; die Funktionen $B(\underline{w}, k)$ und $D(\underline{w}, k)$

Durch Linearkombination der elliptischen Integrale erster und zweiter Art sowie weiterer rationaler Funktionen lassen sich verschiedene andere Funktionen erzeugen. Zur Verkürzung der Formelschreibweise und weil sie von diversen anderen Autoren auch eingeführt wurden, werden in diesem Buch die Funktionen $Z(\underline{w}, k)$, $B(\underline{w}, k)$ und $D(\underline{w}, k)$ benutzt.

Die Jacobische Zeta-Funktion ergibt sich zu

$$Z(\underline{w}, k) = Z_e(\underline{w}, k) = E_e(\underline{w}, k) - \underline{w} \frac{E(k)}{K(k)} \quad (66)$$

in der elliptischen Form. In Analogie zu Gl. 16 - 18 ergibt sich die trigonometrische Form zu

$$Z_t(\underline{w}, k) = E_t(\underline{w}, k) - F_t(\underline{w}, k) \frac{E(k)}{K(k)} \quad (67)$$

und die algebraische Form zu

$$Z_a(\underline{w}, k) = E_a(\underline{w}, k) - F_a(\underline{w}, k) \frac{E(k)}{K(k)} \quad (68)$$

Die Umrechnung erfolgt über:

$$Z_t(\underline{w}, k) = Z_e[F_t(\underline{w}, k), k] \quad (69)$$

$$Z_a(\underline{w}, k) = Z_t(\arcsin \underline{w}, k) \quad (70)$$

$$Z_e(\underline{w}, k) = Z_t\{\arcsin[\operatorname{sn}(\underline{w}, k)], k\} \quad (71)$$

$$Z_a(\underline{w}, k) = Z_e[F_a(\underline{w}), k] \quad (72)$$

$$Z_e(\underline{w}, k) = Z_a[\operatorname{sn}(\underline{w}, k), k] \quad (73)$$

$$Z_t(\underline{w}, k) = Z_a(\sin \underline{w}, k). \quad (74)$$

Bild 12.11 zeigt die Abbildung durch $Z_e(\underline{w}, k)$, Bild 12.12 die durch $Z_t(\underline{w}, k)$ und Bild 12.13 die durch $Z_a(\underline{w}, k)$.

Weiterhin gilt:

$$Z_e(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \left[\operatorname{dn}^2(\underline{w}, k) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] d\underline{w} \quad (75)$$

$$Z_e(-\underline{w}, k) = -Z_e(\underline{w}, k) \quad (76)$$

$$Z_e(\underline{w}, k=0) = 0 \quad (77)$$

$$Z_e(\underline{w}, k=1) = \tanh \underline{w} \quad (78)$$

$$Z_e[\underline{w} + K(k), k] = Z_e(\underline{w}, k) - k^2 \cdot \operatorname{sn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{cn}(\underline{w}, k) / \operatorname{dn}(\underline{w}, k) \quad (79)$$

$$Z_e[\underline{w} + jK'(k), k] = Z_e(\underline{w}, k) - j \frac{\pi}{2K(k)} + \operatorname{cn}(\underline{w}, k) \cdot \operatorname{dn}(\underline{w}, k) / \operatorname{sn}(\underline{w}, k) \quad (80)$$

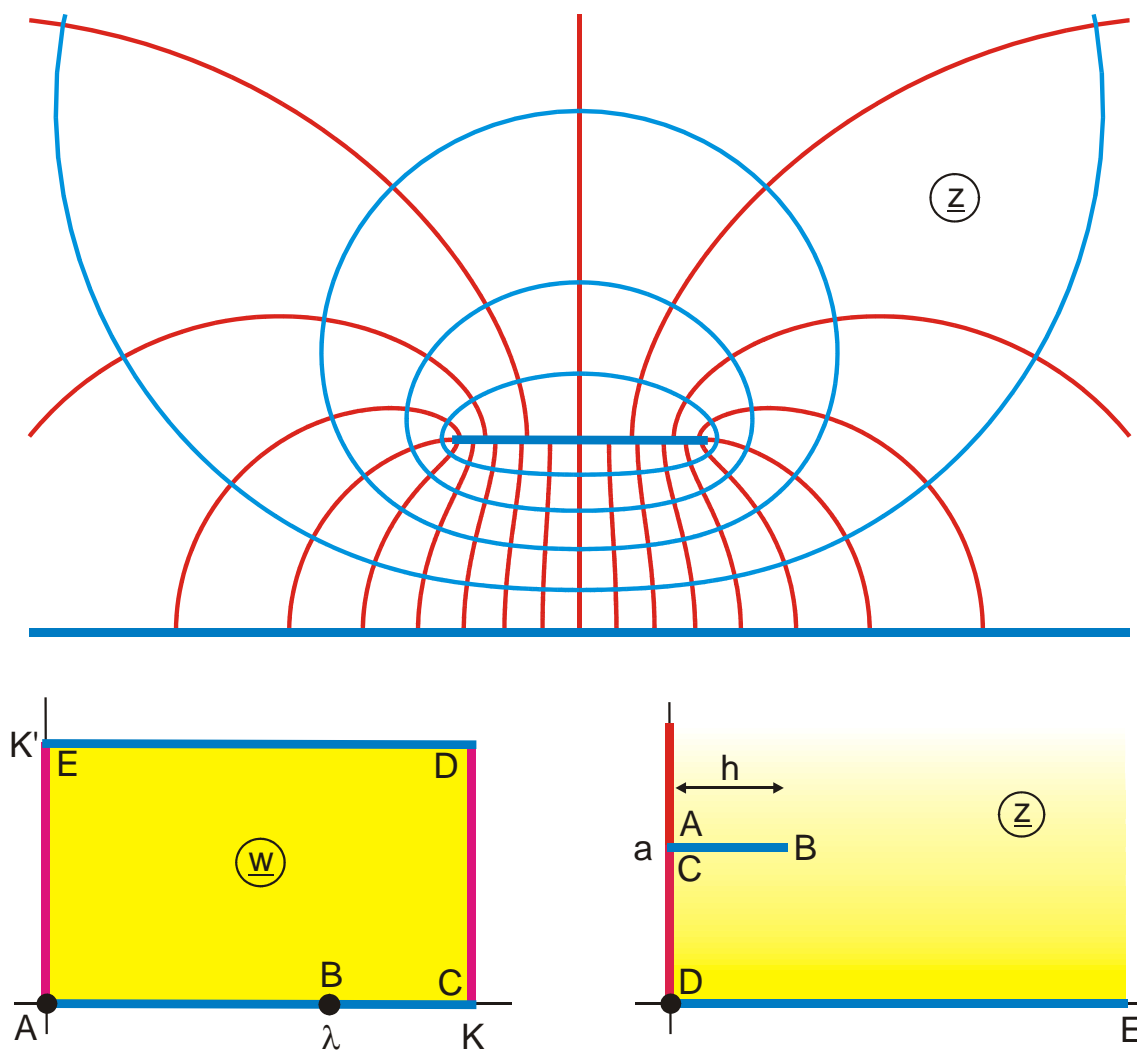


Bild 12.11: Die Abbildung $z = Z_c(w, k)$, Abb. E 2,

mit $h = Z_a\left(\frac{\sqrt{1-E/K}}{k}, k\right)$, $a = \frac{\pi}{2K}$ und $\lambda = F_a\left(\frac{1}{k}\sqrt{1-E/K}, k\right)$

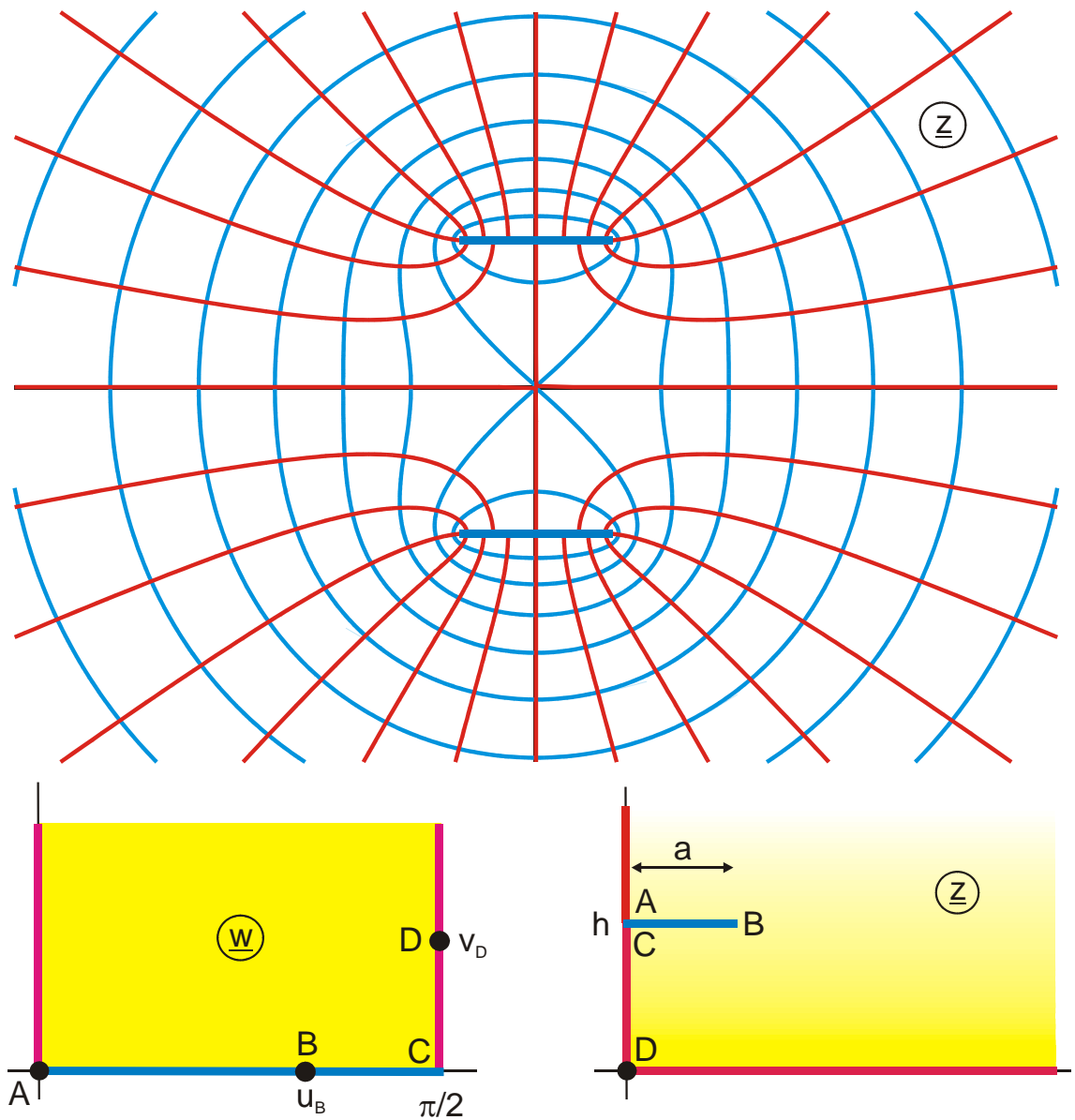


Bild 12.12: Die Abbildung $z = Z_t(w, k)$, Abb S 2, mit $u_B = \sin \left(\frac{\sqrt{1 - E/K}}{k} \right)$

$$a = \frac{\pi}{2K}$$

$$u_B = \arcsin b$$

$$h = Z_t(u_B, k) = Z_a(b, k)$$

$$b = \frac{1}{k} \sqrt{1 - \frac{E}{K}}$$

$$v_D = \operatorname{arcosh}(1/k)$$

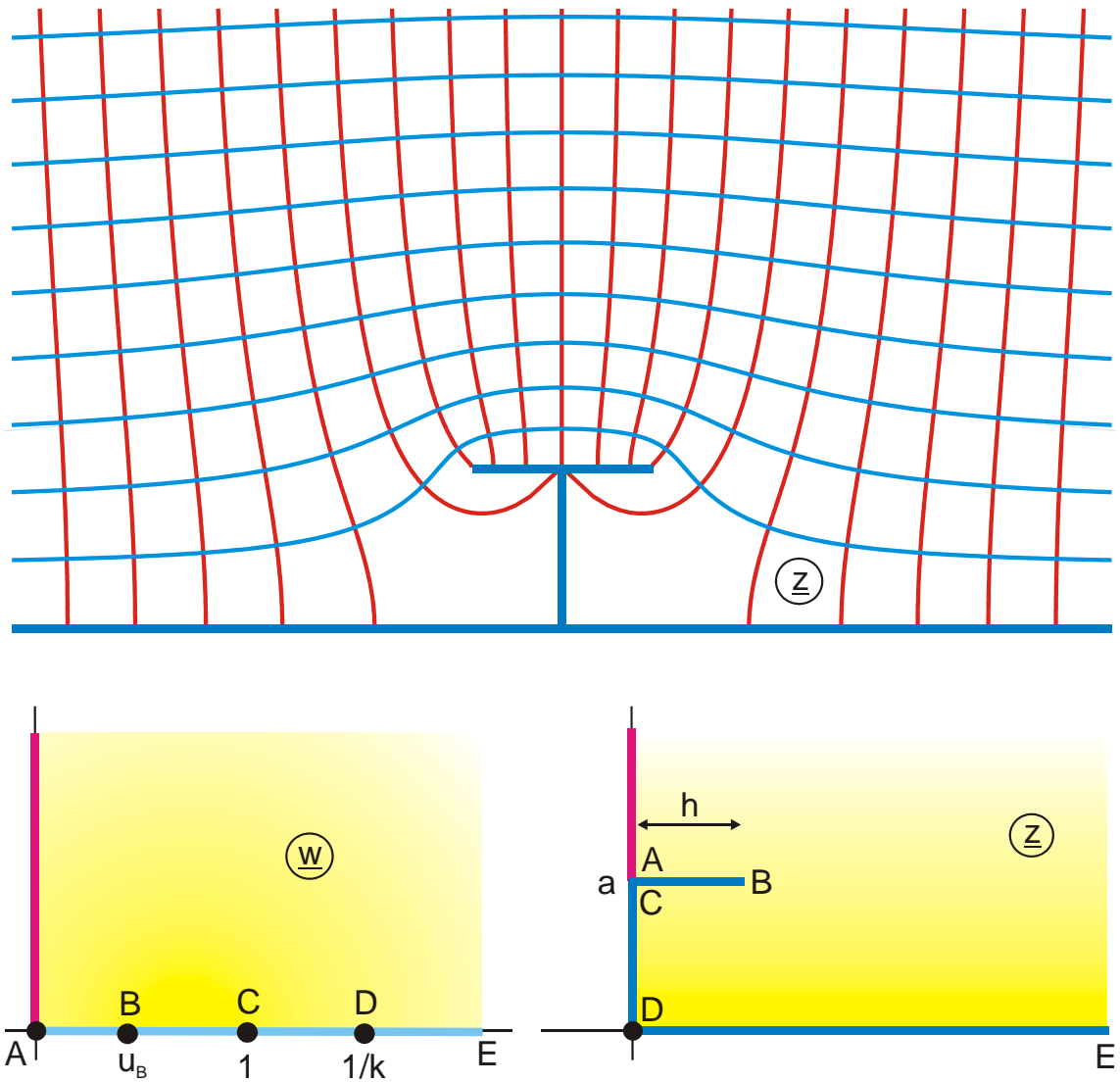


Bild 12.13: Die Abbildung $z = Z_a(w, k)$, Abb. A 11.1,

mit $h = Z_a\left(\frac{\sqrt{1-E/K}}{k}, k\right)$, $a = \frac{\pi}{2K}$ und $u_B = \frac{1}{k}\sqrt{1-E/K}$

Aus dem elliptischen Integral 1. Art ergibt sich mit $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ die Zerlegung

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$D_t(\varphi, k) + B_t(\varphi, k) = F_t(\varphi, k) \quad (81)$$

Trigonometrische Form (Bild 12.14):

$$D_t(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \frac{\sin^2 \underline{w}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \underline{w}}} d\underline{w} \quad (82)$$

$$B_t(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \frac{\cos^2 \underline{w}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \underline{w}}} d\underline{w} \quad (83)$$

Algebraische Form (Bild 12.15):

$$D_a(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \frac{\underline{w}^2}{\sqrt{(1-\underline{w}^2)(1-k^2 \underline{w}^2)}} d\underline{w} \quad (84)$$

$$B_a(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \frac{\sqrt{1-\underline{w}^2}}{\sqrt{1-k^2 \underline{w}^2}} d\underline{w} \quad (85)$$

Elliptische Form (Bild 12.16):

$$D_e(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \operatorname{sn}^2(\underline{w}, k) d\underline{w} \quad (86)$$

$$B_e(\underline{w}, k) = \int_0^{\underline{w}} \operatorname{cn}^2(\underline{w}, k) d\underline{w} \quad (87)$$

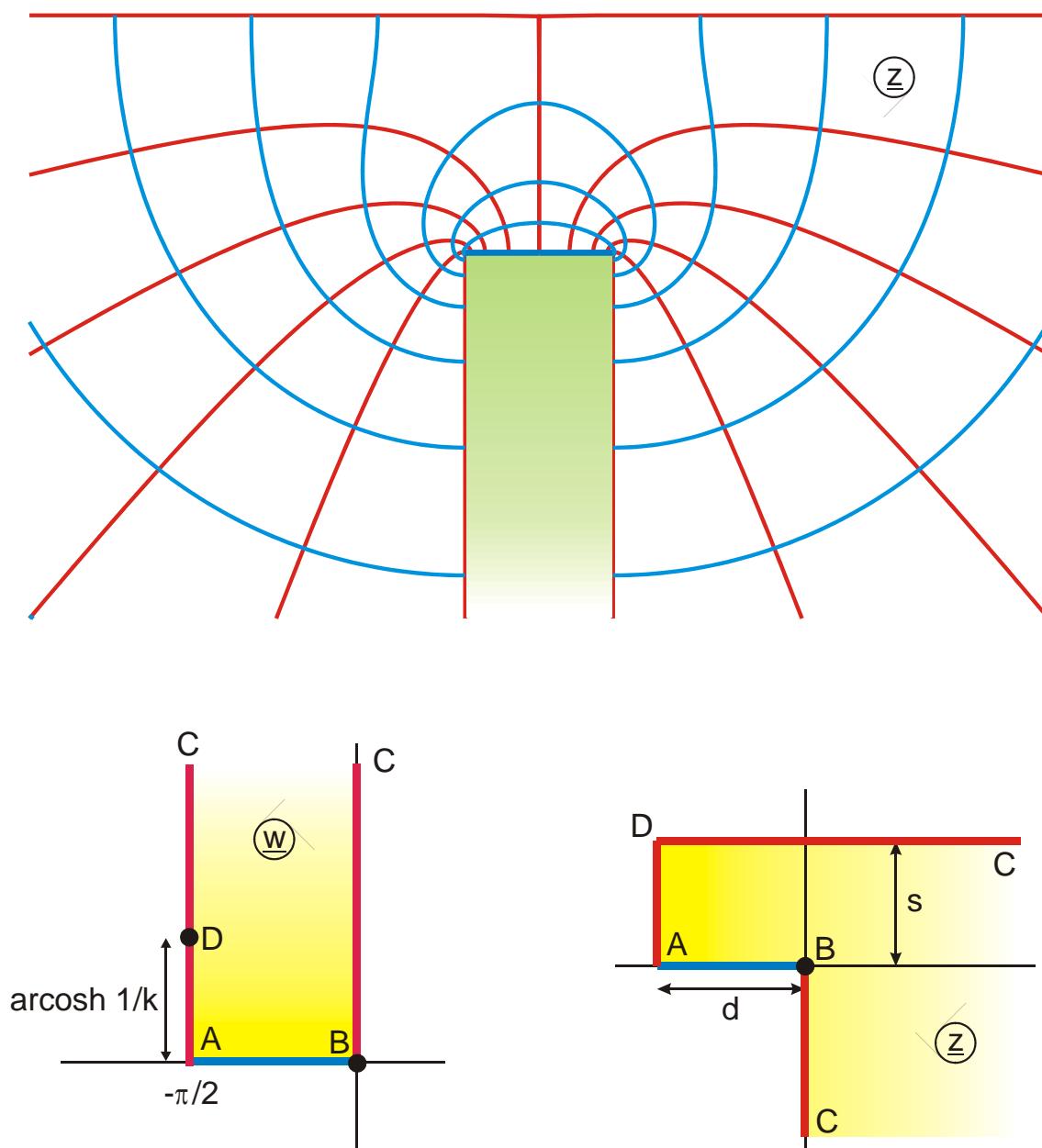


Bild 12.14 a: Die Abbildung $z = D_t(w, k)$, Abb. U 2

$$d = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}$$

$$s = \frac{E'(k)}{k^2}$$

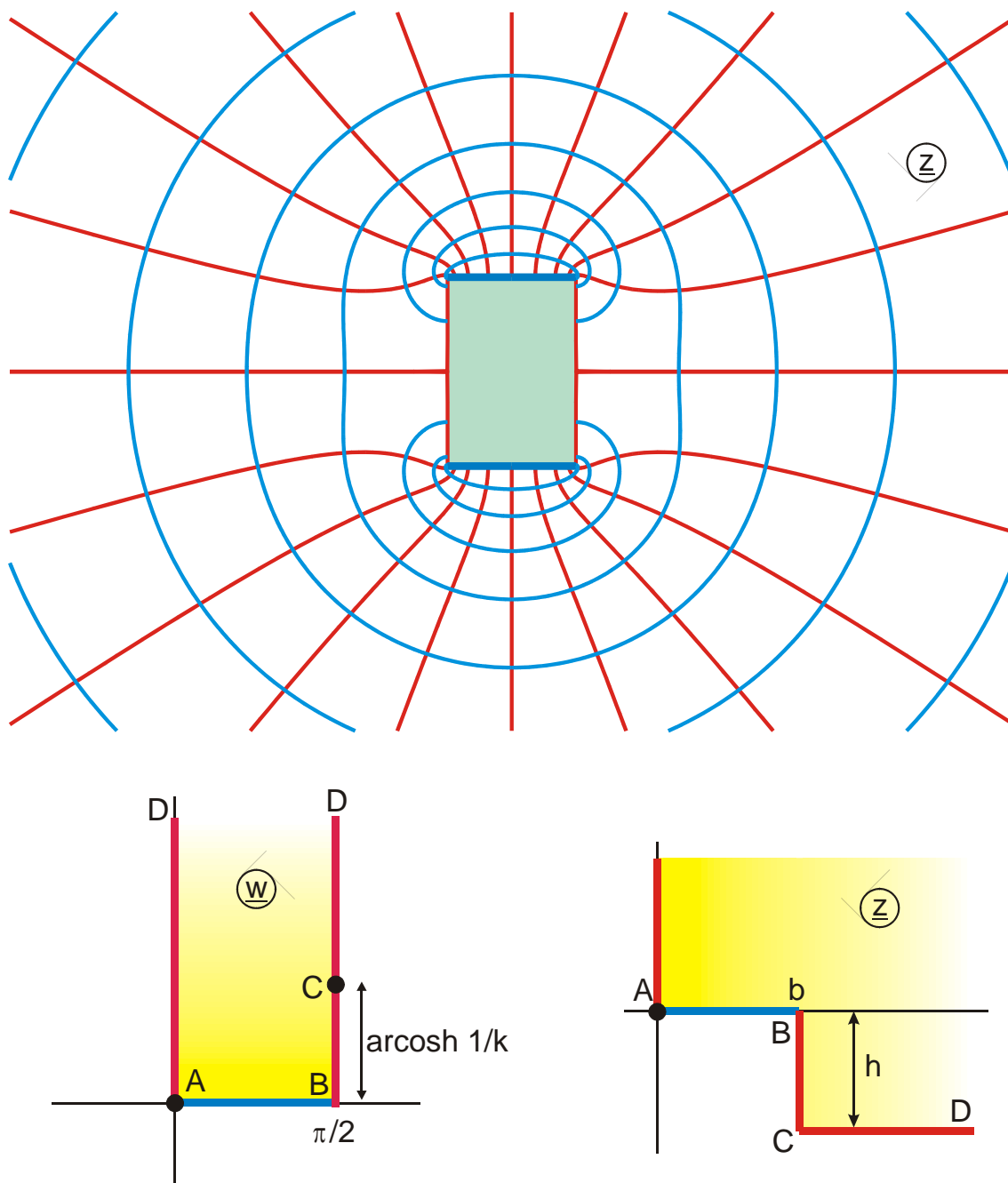


Bild 12.14 b: Die Abbildung $z = B_t(w, k)$, Abb. U 1,

$$b = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2}$$

$$h = \frac{E'(k)}{k^2} - K'(k)$$

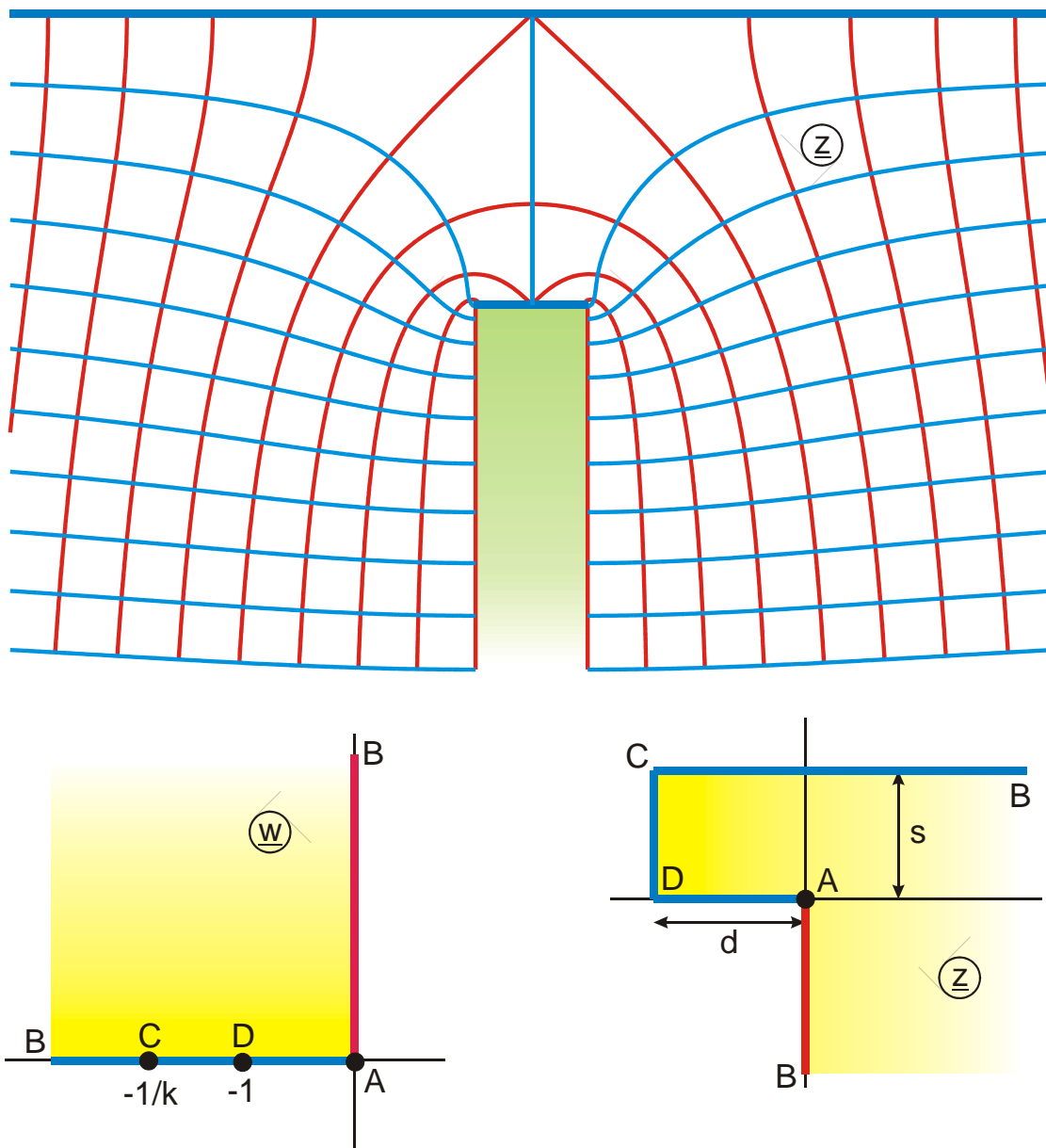


Bild 12.15 a: Die Abbildung $z = D_a(w, k)$, Abb. U 2.1,

$$d = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}$$

$$s = \frac{E'(k)}{k^2}$$

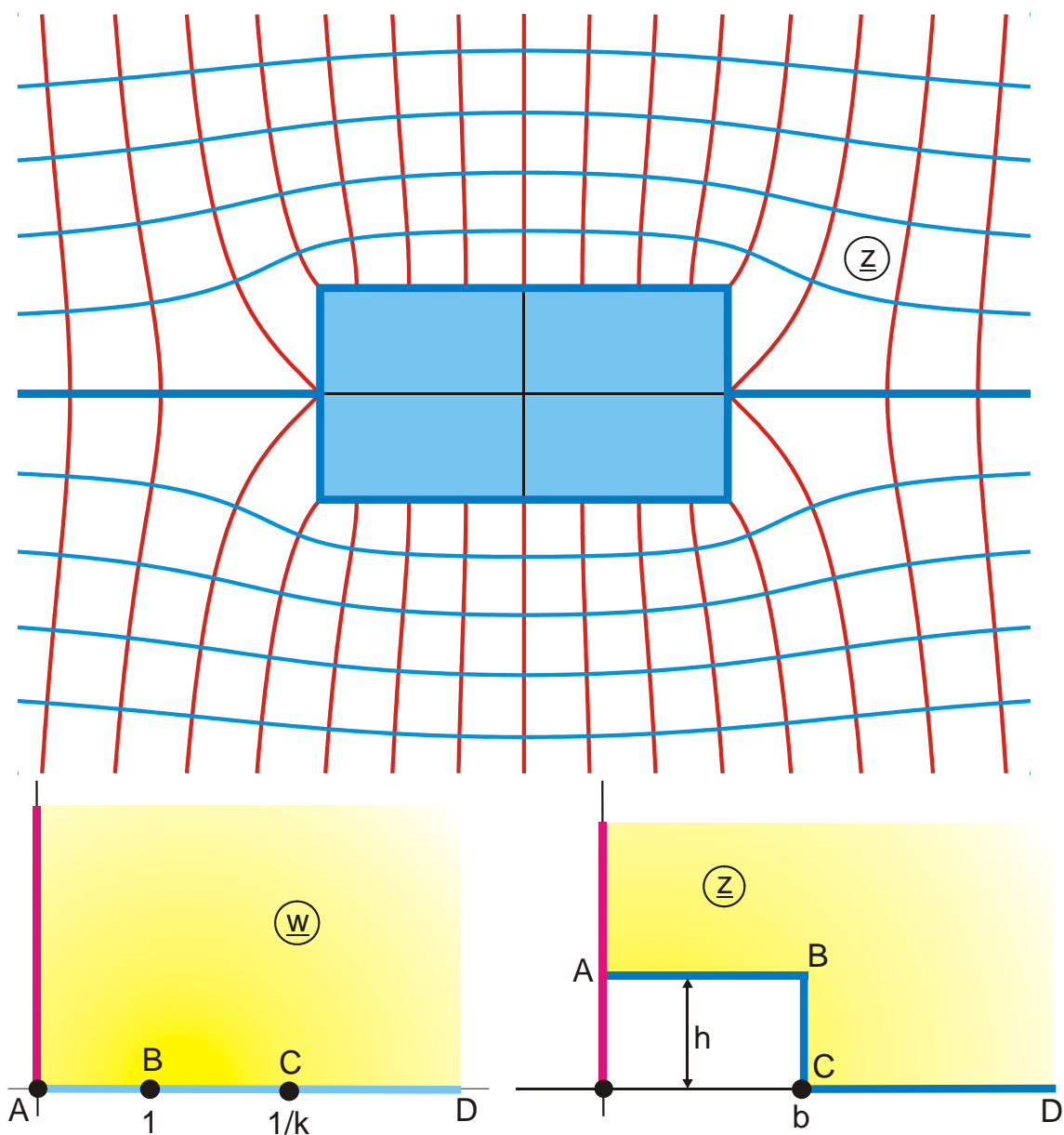


Bild 12.15 b: Die Abbildung $z = B_a(w, k)$, Abb. A 10.2,

mit $b = \frac{E - k'K}{k^2}$ und $h = \frac{E'}{k^2} - K'$

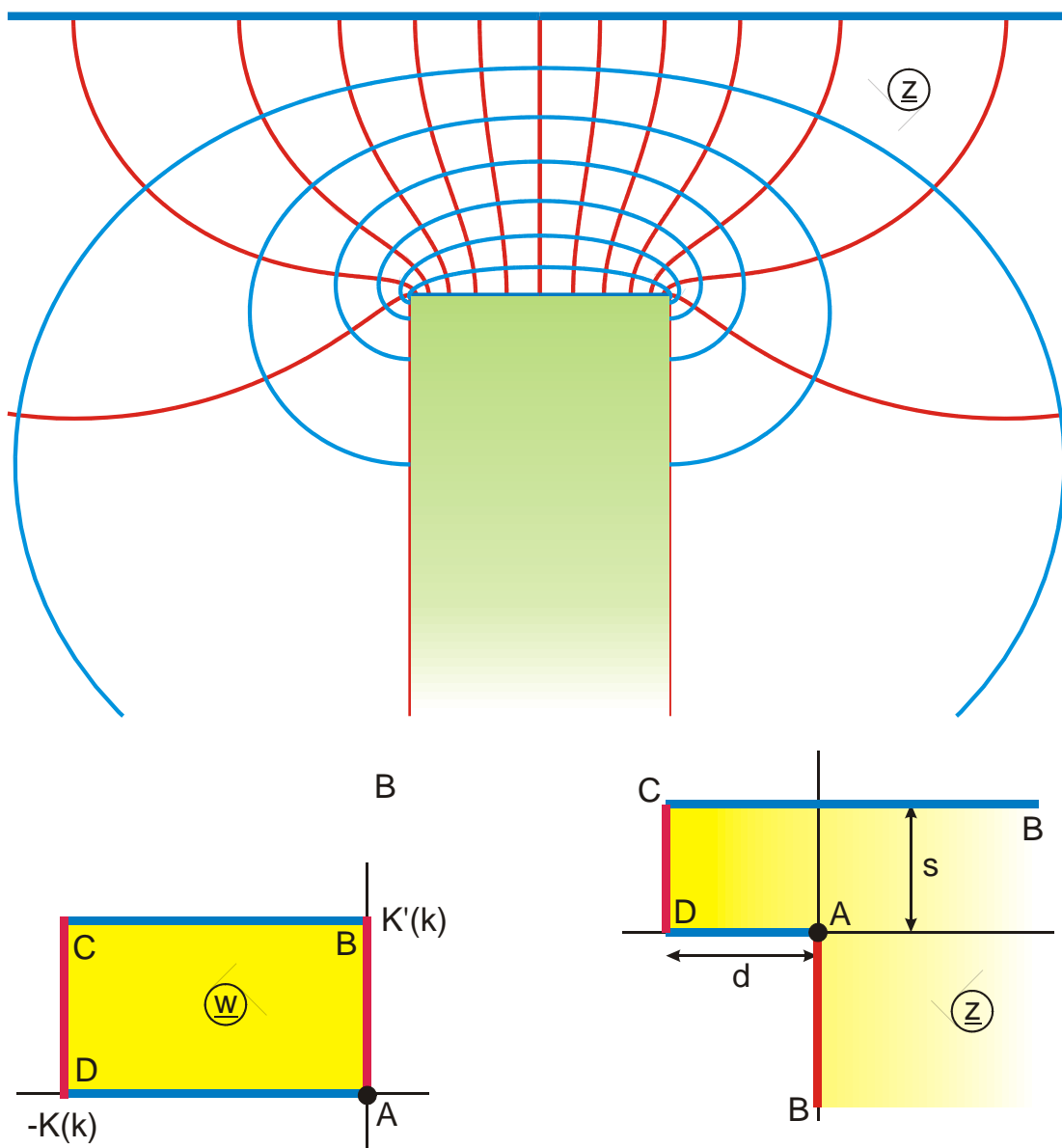


Bild 12.16 a: Die Abbildung $z = D_e(w, k)$, Abb. U 2.2,

$$d = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}$$

$$s = \frac{E'(k)}{k^2}$$

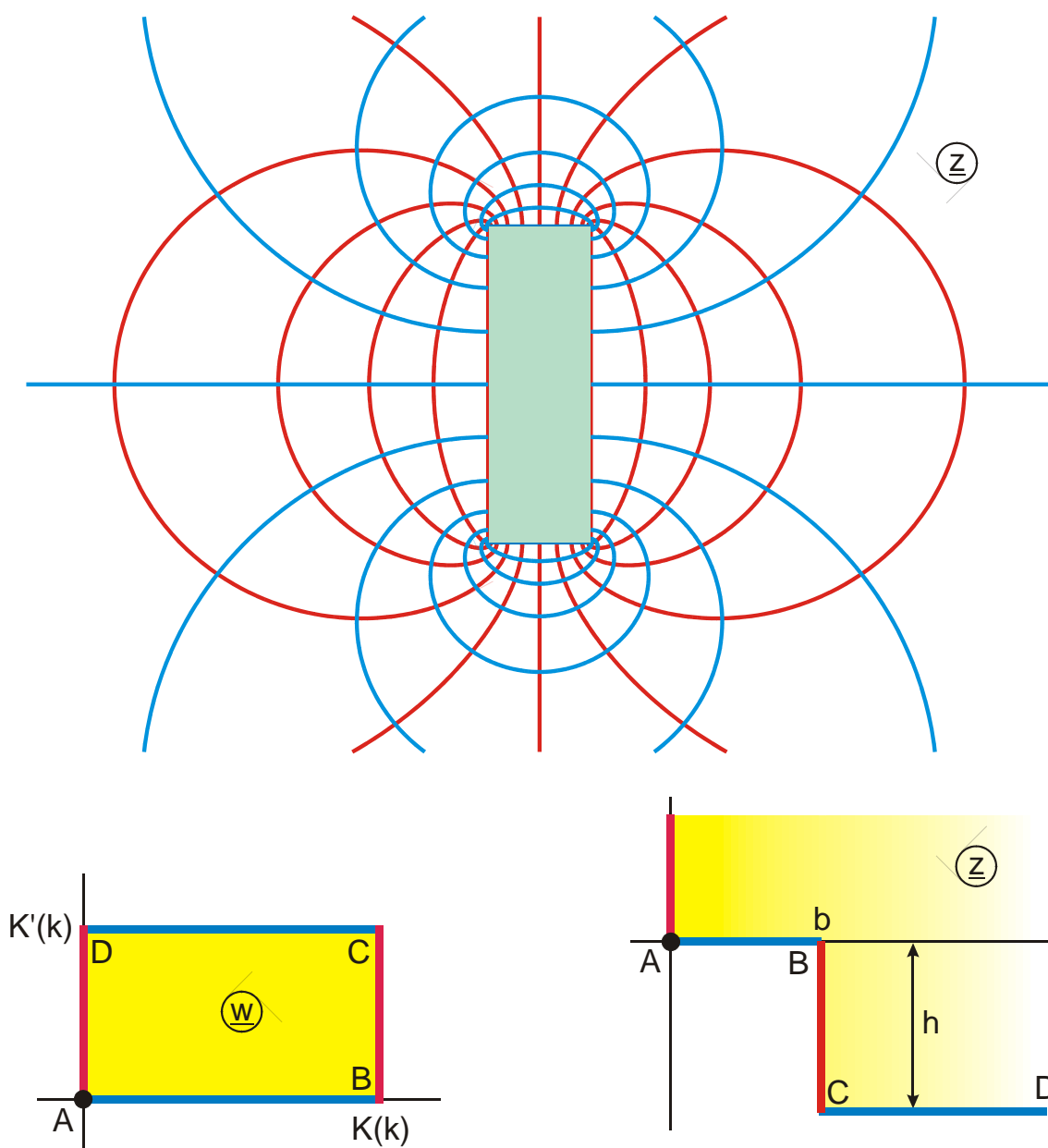


Bild 12.16 b: Die Abbildung $z = B_e(w, k)$, Abb. U 1.1,

mit $b = \frac{E - k'K}{k^2}$ und $h = \frac{E'}{k^2} - K'$

Vollständige Integrale:

$$D(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2} \quad (88)$$

$$B(k) = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2} \quad (89)$$

Weiterhin gilt:

$$D(\underline{w}, k) = \frac{1}{k^2} [F(\underline{w}, k) - E(\underline{w}, k)] \quad (90)$$

$$B(\underline{w}, k) = \frac{1}{k^2} [E(\underline{w}, k) - k'^2 F(\underline{w}, k)] \quad (91)$$

Die Funktion $D(\underline{w}, k)$ ergibt bezüglich der Topologie keine neuartigen konformen Abbildungen. Abbildungen mit $D(\underline{w}, k)$ lassen sich stets durch Abbildungen mit dem elliptischen Integral 2. Art $E(\underline{w}, k)$ ersetzen. Man erkennt dies auch unmittelbar aus dem Vergleich von Gl. (86) mit Gl. (45): Die Funktionen $sn(\underline{w}, k)$ und $dn(\underline{w}, k)$ im Integranden ergeben ebenfalls gleichartige Abbildungen.

12.4 Das elliptische Integral 3.Art

Das elliptische Integral 3.Art wird mit dem Großbuchstaben Π gekennzeichnet. Es sind vier Formen gebräuchlich:

Die algebraische Form:

$$\Pi_a(t, k, n) = \int_0^t \frac{dt}{(1 - nt^2)\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \quad (92)$$

Durch Substitution $t = \sin \varphi$ ergibt sich daraus die trigonometrische Form:

$$\Pi_t(\varphi, k, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (93)$$

Durch Substitution $t = \operatorname{sn}(u, k)$ und $n = [k \cdot \operatorname{sn}(a, k)]^2$ ergibt sich die elliptische Form:

$$\Pi_e(u, k, a) = \int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(a, k) \cdot \operatorname{sn}^2(u, k)} \quad (94)$$

Die Jacobische Form ergibt sich aus der elliptischen Form über die Gleichung

$$\Pi_j(u, k, a) = \frac{\operatorname{cn}(a, k) \operatorname{dn}(a, k)}{\operatorname{sn}(a, k)} [\Pi_e(u, k, a) - u] \quad (95)$$

$$\Pi_j(u, k, a) = k^2 \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{dn}(a, k) \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2(u, k) du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(a, k) \cdot \operatorname{sn}^2(u, k)} \quad (96)$$

Der Parameter n ist eine beliebig wählbare komplexe Zahl. Für die hier betrachteten konformen Abbildungen ist in der Regel jedoch n reell bzw. a reell. Die Abbildung hat in den vier Bereichen

- | | |
|-------|---------------|
| (I) | $n < 0$ |
| (II) | $0 < n < k^2$ |
| (III) | $k^2 < n < 1$ |
| (IV) | $n > 1$ |

jeweils eine grundlegend andere Topologie.

Die Fälle, in denen ein komplexes \underline{a} benutzt wird, beschränken sich auf den Sonderfall $\underline{a} = \operatorname{Re} \underline{a} + jK'(k)$ bei den Abbildungen D 6.2 und A 10.3.

Sofern man alle vier Formen des elliptischen Integrals nutzt, reicht es für die Zwecke der konformen Abbildung aus, sich auf reelles n und den Bereich $0 < n < k^2$ bzw. auf reelles a und den Bereich $0 < a < K(k)$ zu beschränken.

In allgemeiner Schreibweise, mit der komplexen Variablen \underline{w} , ergibt sich

die algebraische Form

$$\Pi_a(\underline{w}, k, n) = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{(1 - n\underline{w}^2) \sqrt{(1 - \underline{w}^2)(1 - k^2 \underline{w}^2)}} \quad (97)$$

die trigonometrische Form

$$\Pi_t(\underline{w}, k, n) = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{(1 - n \sin^2 \underline{w}) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \underline{w}}} \quad (98)$$

die elliptische Form

$$\Pi_e(\underline{w}, k, a) = \int_0^{\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(a, k) \cdot \operatorname{sn}^2(\underline{w}, k)} \quad (99)$$

und die Jacobische Form

$$\Pi_j(\underline{w}, k, a) = k^2 \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{dn}(a, k) \int_0^{\underline{w}} \frac{\operatorname{sn}^2(\underline{w}, k) d\underline{w}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(a, k) \cdot \operatorname{sn}^2(\underline{w}, k)} \quad (100)$$

Für die Umrechnung der vier Formen ineinander gilt bezüglich der Variablen Tabelle 12.2 sowie

$$a = F_a(\sqrt{n} / k, k) \quad \text{und} \quad n = k^2 \operatorname{sn}^2(a, k). \quad (101)$$

Die Zahlenwerte des elliptischen Integrals 3.Art für komplexes \underline{w} und komplexes \underline{n} ergeben sich aus den Unterprogrammen Cpia, Cpit, Cpie und Cpij.

Das vollständige elliptische Integral 3.Art ergibt sich zu:

$$\Pi(k, n) = \Pi_a(\underline{w} = 1, k, n) = \Pi_t(\underline{w} = \frac{\pi}{2}, k, n) = \Pi_e[\underline{w} = K(k), k, a] \quad (102)$$

Für $0 < n < k^2$ gilt:

$$\Pi(k, n) = K(k) \left[1 + \sqrt{\frac{n}{(1-n)(k^2-n)}} \cdot Z_a\left(\frac{\sqrt{n}}{k}, k\right) \right] \quad (103)$$

$$\Pi(k, a) = K(k) \left[1 + \frac{\operatorname{sn}(a, k)}{\operatorname{cn}(a, k) \operatorname{dn}(a, k)} \cdot Z_e(a, k) \right] \quad (104)$$

Der Zahlenwert des vollständigen elliptischen Integrals 3. Art ergibt sich aus dem Unterprogramm Kep.

Die Bilder 12.17 bis 12.20 zeigen die konformen Abbildungen, die zu den vier Formen des elliptischen Integrals 3. Art gehören. In Bild 12.17 befindet sich im Punkt E ein Li- niendipol, in Bild 12.18 ist in Punkt E eine Linienladung.

	$E_a(\underline{w}, k)$	$E_t(\underline{w}, k)$	$E_e(\underline{w}, k)$
$E_a(\underline{w}, k) =$	$E_a(\underline{w}, k)$	$E_t(\arcsin \underline{w}, k)$	$E_e[F_a(\underline{w}, k), k]$
$E_t(\underline{w}, k) =$	$E_a(\sin \underline{w}, k)$	$E_t(\underline{w}, k)$	$E_e[F_t(\underline{w}, k), k]$
$E_e(\underline{w}, k) =$	$E_a[\operatorname{sn}(\underline{w}, k), k]$	$E_t[\arcsin \{\operatorname{sn}(\underline{w}, k)\}, k]$	$E_e(\underline{w}, k)$

Tabelle 12.2: Umrechnung der elliptischen Integrale 2. Art

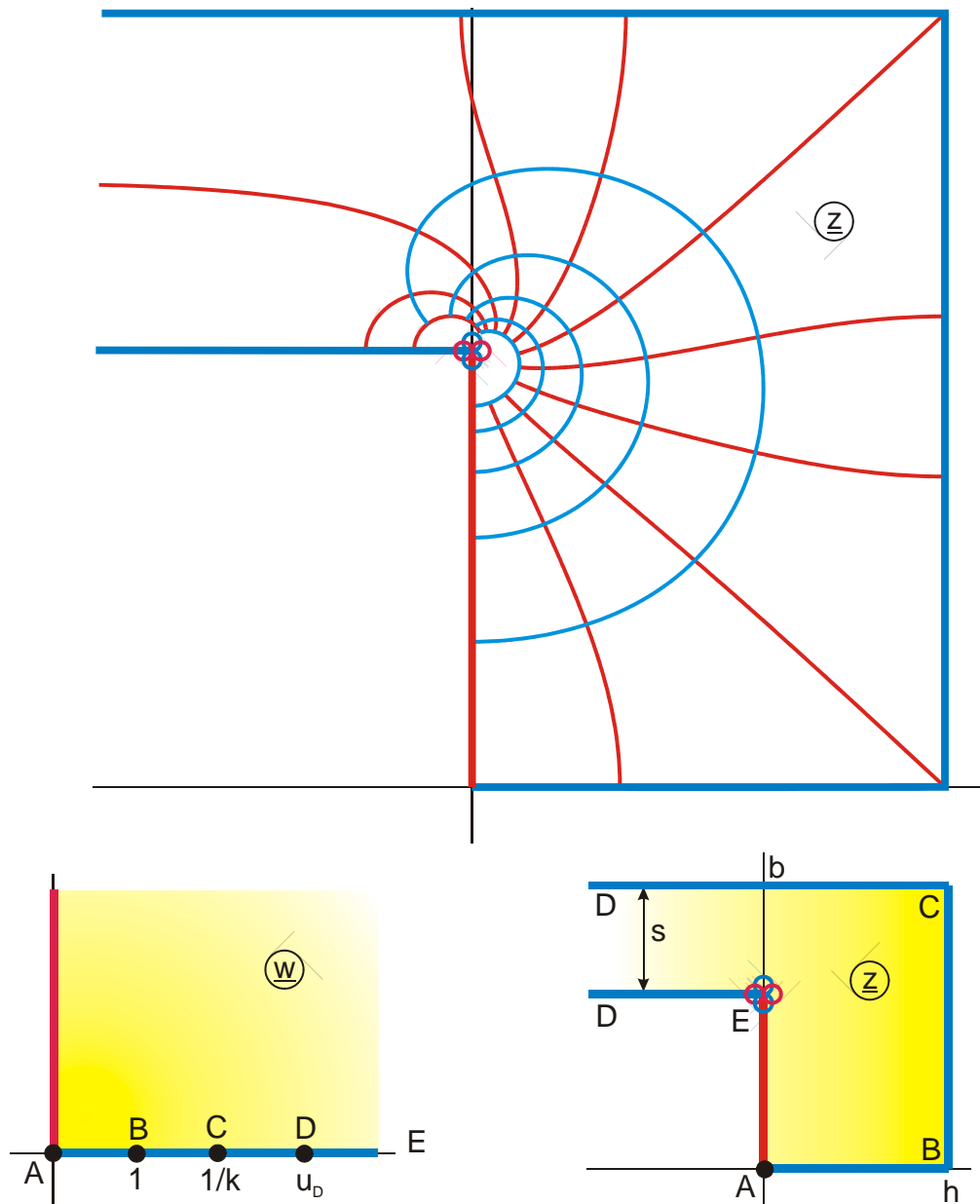


Bild 12.17: Die Abbildung $z = \Pi_a(w, k, n)$ für $0 < n < k^2$, Abb. U 4.2

$$h = K(k) \left[1 + c Z_a \left(\frac{\sqrt{n}}{k}, k \right) \right] = \Pi(k, a) \quad u_D = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$b = c \left[K'(k) Z_a \left(\frac{\sqrt{n}}{k}, k \right) \right] + K'(k) \quad s = c\pi/2$$

$$\text{mit } a = F_a \left(\sqrt{n}/k, k \right) \quad \text{und } c = \sqrt{\frac{n}{(1-n)(k^2-n)}}$$

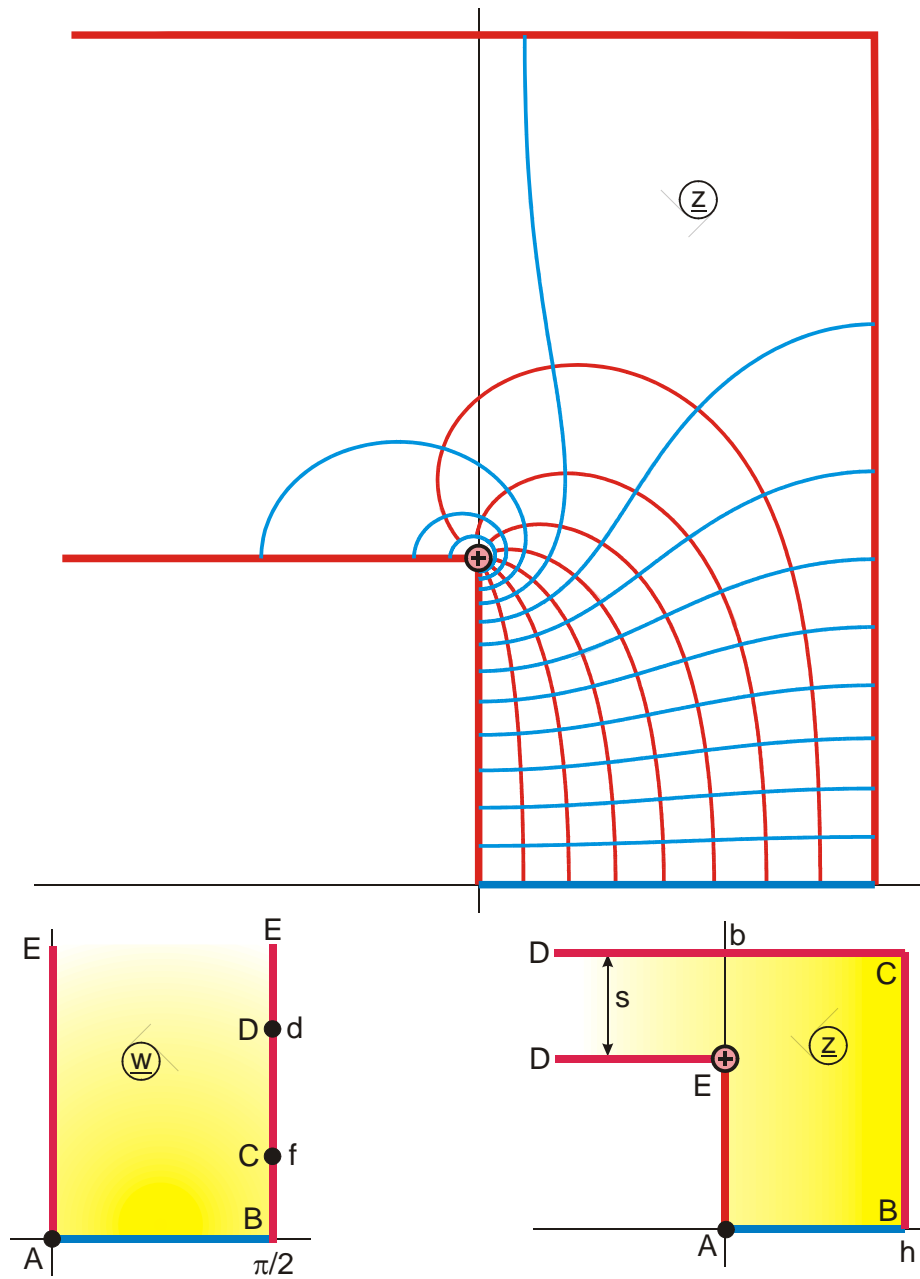


Bild 12.18: Die Abbildung $z = \Pi_t(w, k, n)$ für $0 < n < k^2$, Abb. U 4.1

$$h = K(k) \left[1 + c Z_a \left(\frac{\sqrt{n}}{k}, k \right) \right] = \Pi(k, a)$$

$$b = c \left[K'(k) Z_a \left(\frac{\sqrt{n}}{k}, k \right) \right] + K'(k) \quad s = c\pi/2$$

$$d = \operatorname{arcosh}(1/\sqrt{n}) \quad c = \operatorname{arcosh}(1/k)$$

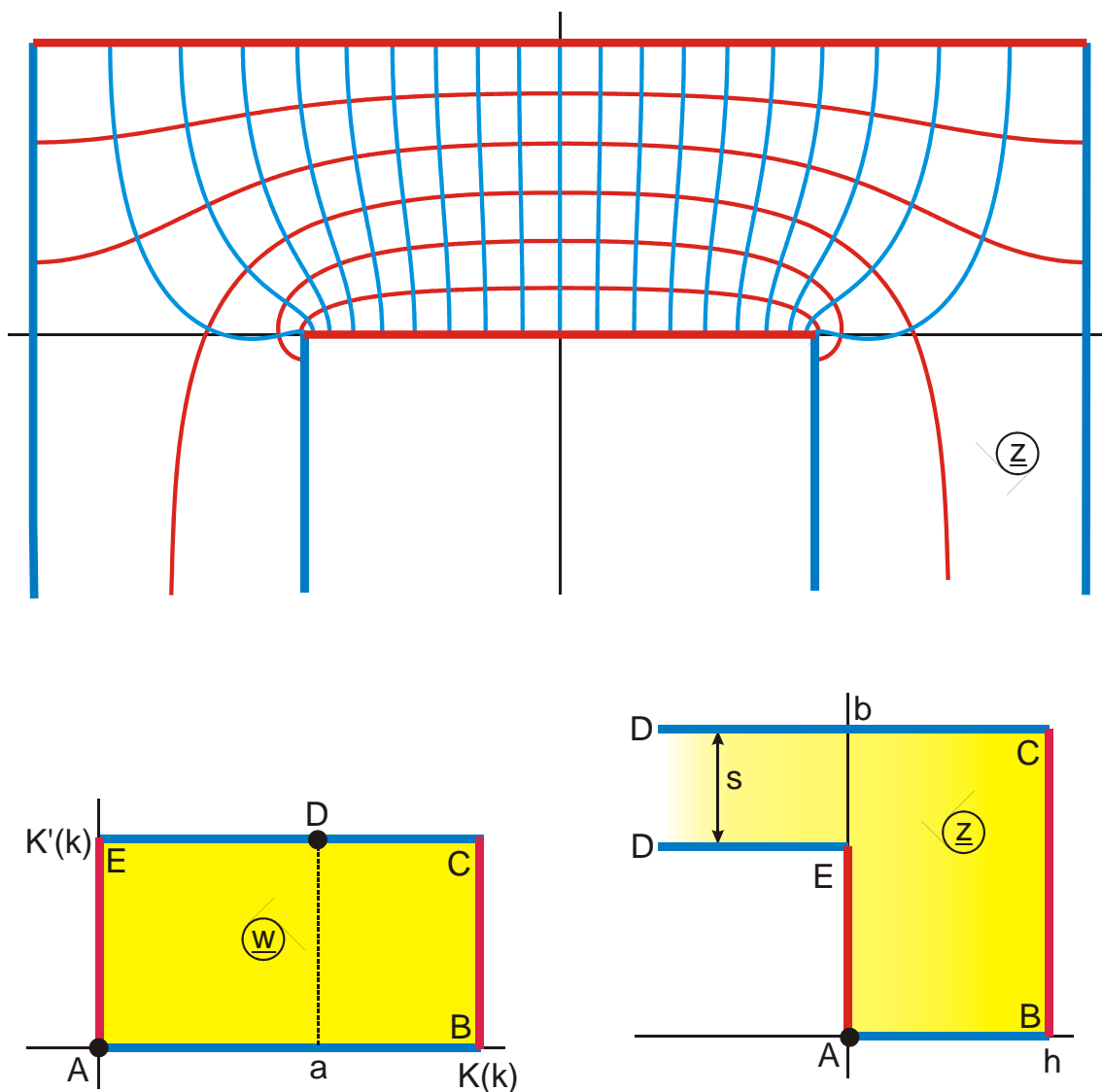


Bild 12.19: Die Abbildung $z = \Pi_e(w, k, a)$ für $0 < a < K(k)$, Abb. U 4.3

$$h = c Z_e(a, k) K(k) + K(k) = \Pi(k, a)$$

$$b = c \left[K'(k) Z_e(a, k) + \frac{\pi a}{2K(k)} \right] + K'(k) \quad s = c\pi/2$$

$$c = \frac{sn(a, k)}{cn(a, k) dn(a, k)}$$

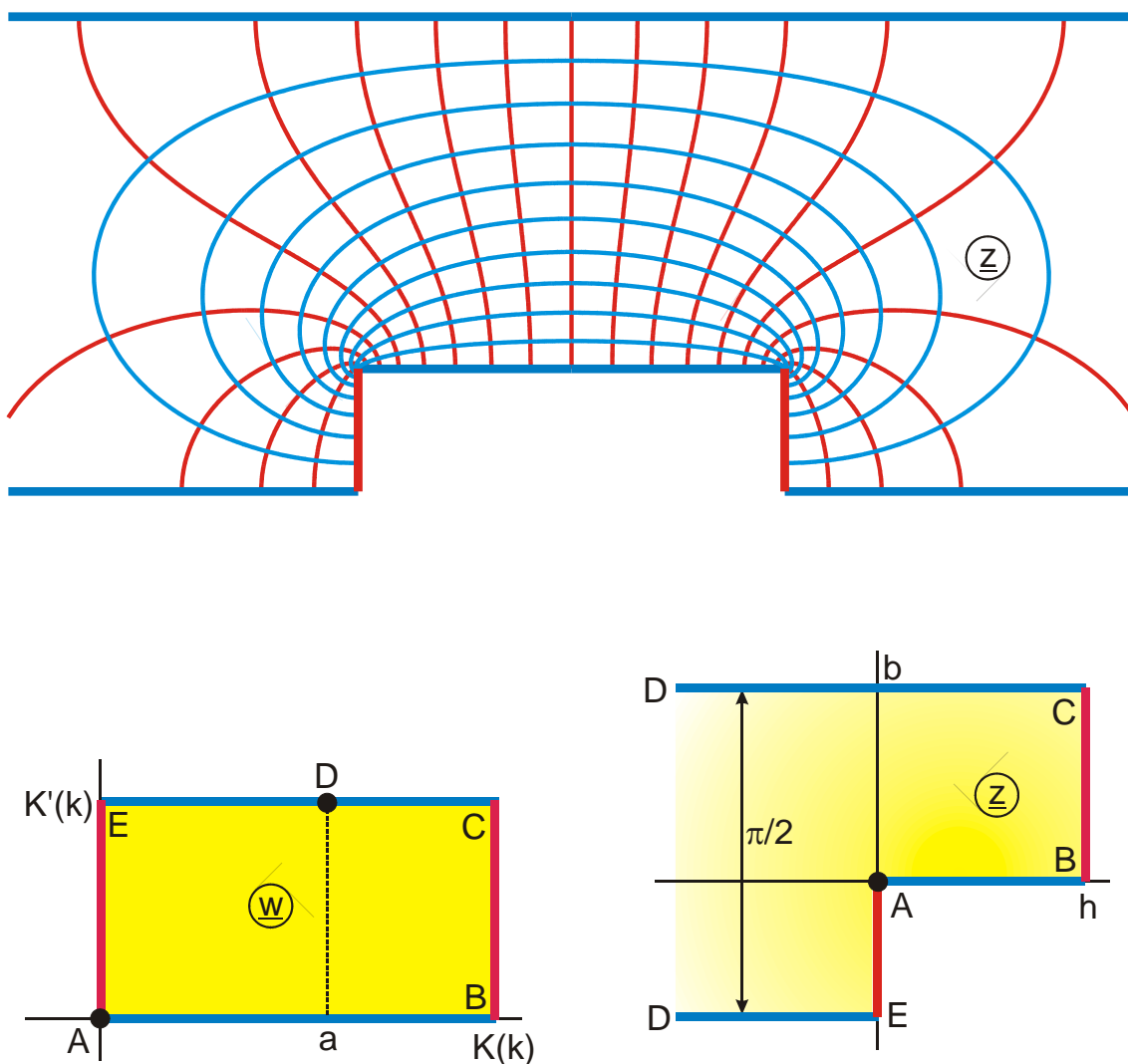


Bild 12.20: Die Abbildung $z = \Pi_j(w, k, a)$ für $0 < a < K(k)$, Abb. U 3

$$h = Z_e(a, k) K(k)$$

$$b = K'(k) Z_e(a, k) + \frac{\pi a}{2K(k)}$$

Spezielle Werte:

$$\Pi_t(\underline{w}, 0, 0) = \underline{w} \quad (105)$$

$$F_t(\underline{w}, 0) = \ln \left(\frac{1 + \sin \underline{w}}{\cos \underline{w}} \right) \quad (106)$$

$$\Pi_t(\underline{w}, 1, n) = \frac{1}{n-1} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin \underline{w}}{\cos \underline{w}} \right) - \frac{\sqrt{n}}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{n} \sin \underline{w}}{1 - \sqrt{n} \sin \underline{w}} \right) \right] \quad (107)$$

$$\text{Wenn } \underline{w} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+k'}} \quad \text{dann} \quad F_t(\underline{w}, k) = \frac{K(k)}{2} \quad (108)$$

$$\text{und} \quad E_t(\underline{w}, k) = \frac{E(k) + 1 - k'}{2} \quad (109)$$

$$\Pi_t(1, n) = \infty \quad (110)$$

$$\Pi_t(\underline{w}, k, 0) = F_t(\underline{w}, k) \quad (111)$$

$$\Pi_t(\underline{w}, k, 1) = F_t(\underline{w}, k) - \frac{E_t(\underline{w}, k)}{k'^2} + \left(\frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \underline{w}}}{k'^2} \right) \tan \underline{w} \quad (112)$$

$$\Pi_t(\underline{w}, k, k^2) = \frac{1}{k'^2} \left[E_t(\underline{w}, k) - \frac{k^2 \sin \underline{w} \cos \underline{w}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \underline{w}}} \right] \quad (113)$$

$$\text{Wenn } k = \sqrt{2} - 1 \quad \text{dann} \quad K'(k) = \sqrt{2} K(k) \quad (114)$$

$$\text{Wenn } k = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{dann} \quad K'(k) = 2K(k) \quad (115)$$

$$\text{Wenn } k = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{dann} \quad K'(k) = \sqrt{3} K(k) \quad (116)$$

$$\text{und} \quad E(k) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}K(k)} + \frac{K(k)}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (117)$$

$$\text{und} \quad E'(k) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4K'(k)} + \frac{K'(k)}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (118)$$

13. Theta-Funktionen

Theta-Funktionen ergeben sich in der Physik als Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$a \frac{\partial^2 \vartheta(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial \vartheta(z, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Wird in einem sehr großen isotropen, festen Körper mit der spezifischen Temperaturleit-fähigkeit a , der sich von $z = 0$ bis $z = \pi$ erstreckt, zur Zeit $t = 0$ in der Mitte bei $z = \pi/2$ impulsartig eine hohe Temperatur ϑ erzeugt (Dirac-Stoß δ)

$$\vartheta(z, t = 0) = \pi \delta(z - \pi/2), \quad (2)$$

so ergibt die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für den Fall, daß die Ränder bei $z = 0$ und bei $z = \pi$ konstante Temperatur $\vartheta = 0$ haben, die Reihe

$$\vartheta_1(z, q) = 2q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin[(2n+1)z] \quad (3)$$

mit

$$q = e^{-4at}. \quad (4)$$

Die Reihe ergibt sich elementar durch Lösen der Differentialgleichung mittels Produktansatz

$$\vartheta(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-n^2 a t) \sin(nz) \quad (5)$$

und anschließender Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_n .

Für den Fall, daß die Ränder des festen Körpers isoliert sind, also $\partial\vartheta/\partial z = 0$ bei $z = 0$ und bei $z = \pi$, ergibt sich die Reihe

$$\vartheta_4(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz) . \quad (6)$$

Bild 13.1a zeigt zu äquidistanten Zeiten $m \cdot \Delta t$ die Temperaturverteilung $\vartheta_1(z)$ in dem ausgedehnten festen Körper. Bild 13.1b zeigt die Temperaturverteilung $\vartheta_4(z)$. Das obige Beispiel aus der Physik wurde gewählt, um zu zeigen, daß man sich den Verlauf der Theta-Funktionen mit reellem Argument anschaulich vorstellen kann. Weiterhin ergibt sich daraus, daß der Name der Theta-Funktionen von der Temperatur ϑ herrührt.

Zwei weitere Theta-Funktionen sind definiert über die Reihen

$$\vartheta_2(z, q) = 2q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos[(2n+1)z] \quad (7)$$

und

$$\vartheta_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz) \quad (8)$$

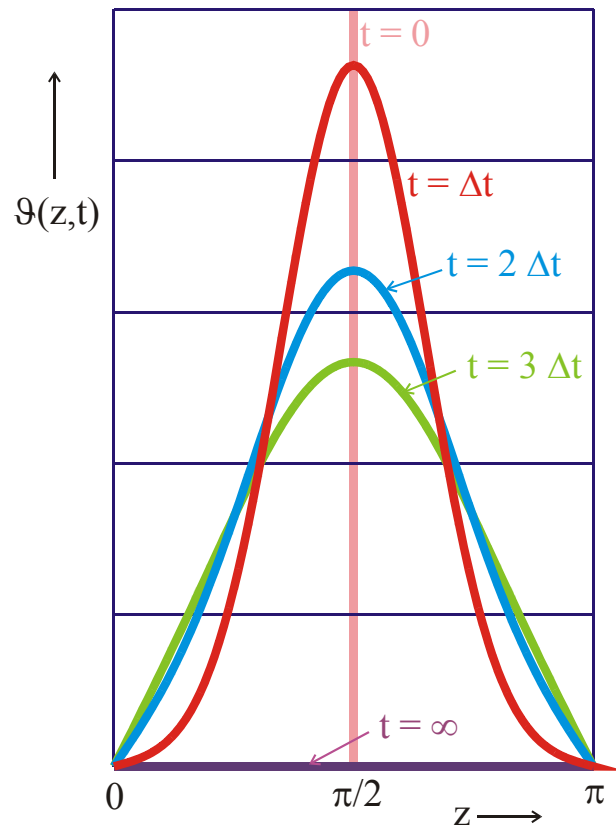
Die Theta-Funktionen sind für beliebige komplexe Zahlen z und q mit $|q| < 1$ definiert. Mit der Beschränkung auf reelle Zahlen q , mit

$$q = e^{-\pi\tau} \quad (9)$$

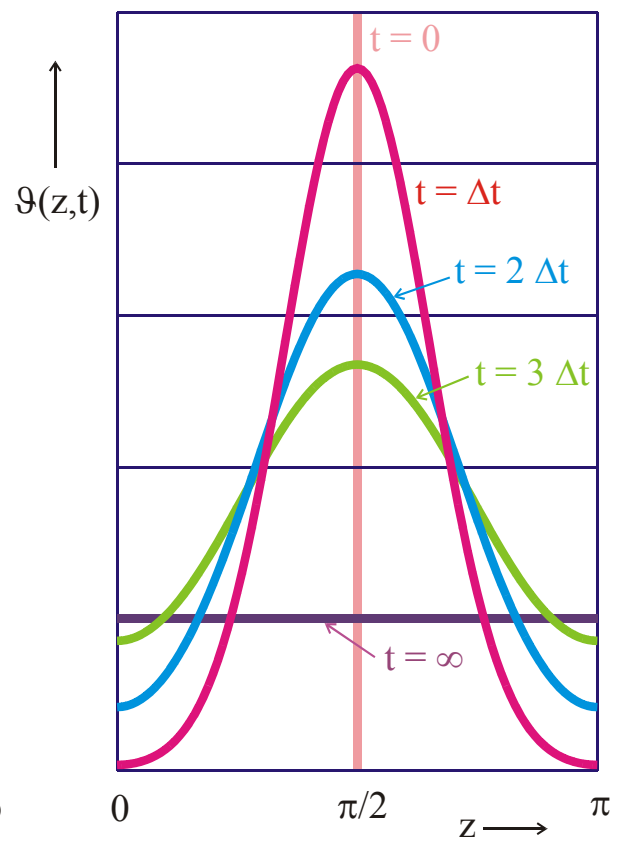
und

$$\tau = K'(k) / K(k) \quad (10)$$

ergibt sich der Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen und den elliptischen Integralen. Die Zahlenwerte dieser Funktionen $\vartheta(\underline{z}, \tau)$ ergeben sich aus den Unterprogrammen Theta 1 bis Theta 4.



a) Temperaturverteilung a



b) Temperaturverteilung b

Bild 13.1: Berechnung der Temperaturverteilung $\Theta(z,t)$ mit Theta-Funktionen

Die Bilder 13.2 bis 13.5 zeigen die zu den Theta-Funktionen gehörigen konformen Abbildungen. Die trigonometrische Funktion im Reihenglied bewirkt, daß die Funktionswerte bezüglich der Variablen z mit $n\pi$ bzw. $n \cdot 2\pi$ periodisch sind.

$\vartheta_1(\underline{z})$ ist eine ungerade Funktion mit der Periode 2π

$\vartheta_2(\underline{z})$ ist eine gerade Funktion mit der Periode 2π

$\vartheta_3(\underline{z})$ ist eine gerade Funktion mit der Periode π

$\vartheta_4(\underline{z})$ ist eine gerade Funktion mit der Periode π

Durch die Exponentialfunktion ähnelt der Verlauf der Abbildung innerhalb einer Viertelperiode dem einer logarithmischen Spirale (Bild 13.6). Die Funktionen sind bezüglich der Variablen τ quasiperiodisch mit $\pi\tau$ bzw. $\pi + \pi\tau$.

$$\vartheta_1(\underline{z} + \pi\tau) = \frac{1}{q} \exp((-j2\underline{z}) \vartheta_1(\underline{z})) \quad (11)$$

Erweitert man den Abbildungsbereich über den angegebenen Bereich hinaus, wird die Abbildungsfunktion mehrblättrig; die logarithmische Spirale läßt sich zu größeren Radien hin fortsetzen.

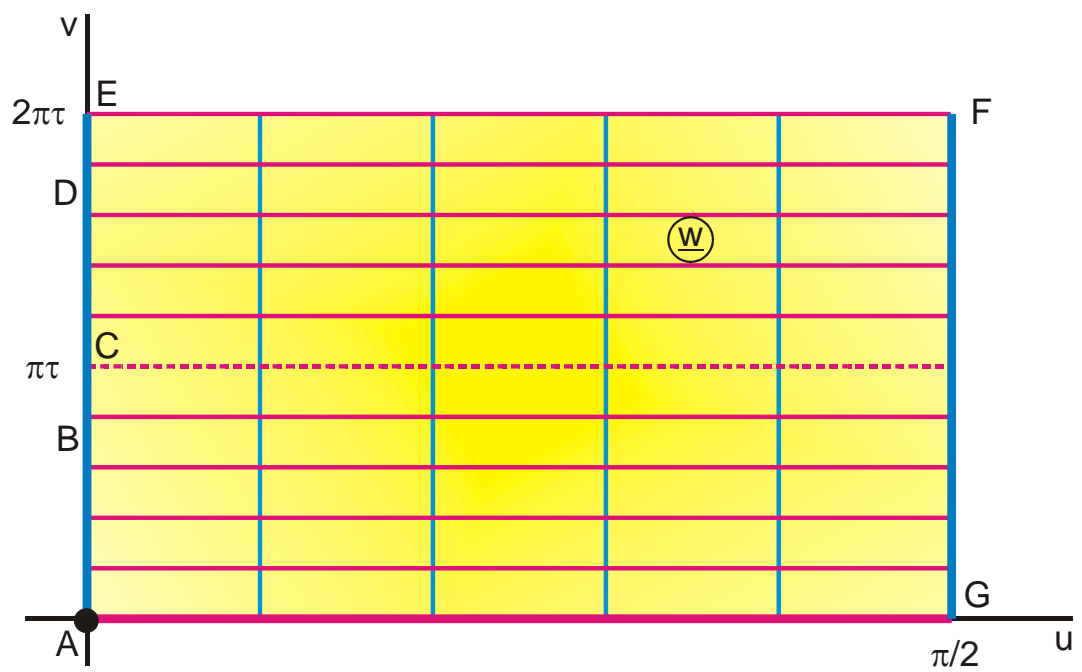
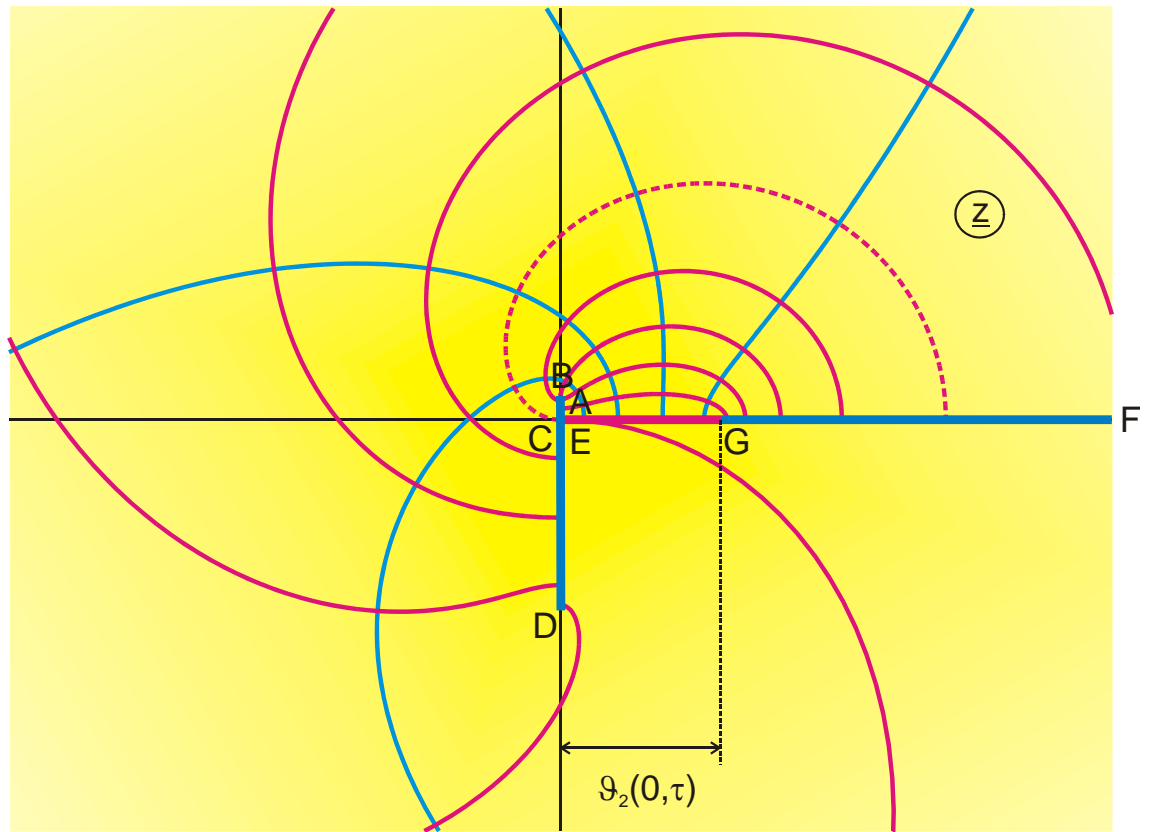


Bild 13.2: Die Abbildung $\underline{z} = \vartheta_1(\underline{z}, \tau)$, mit $\tau = 0,278$

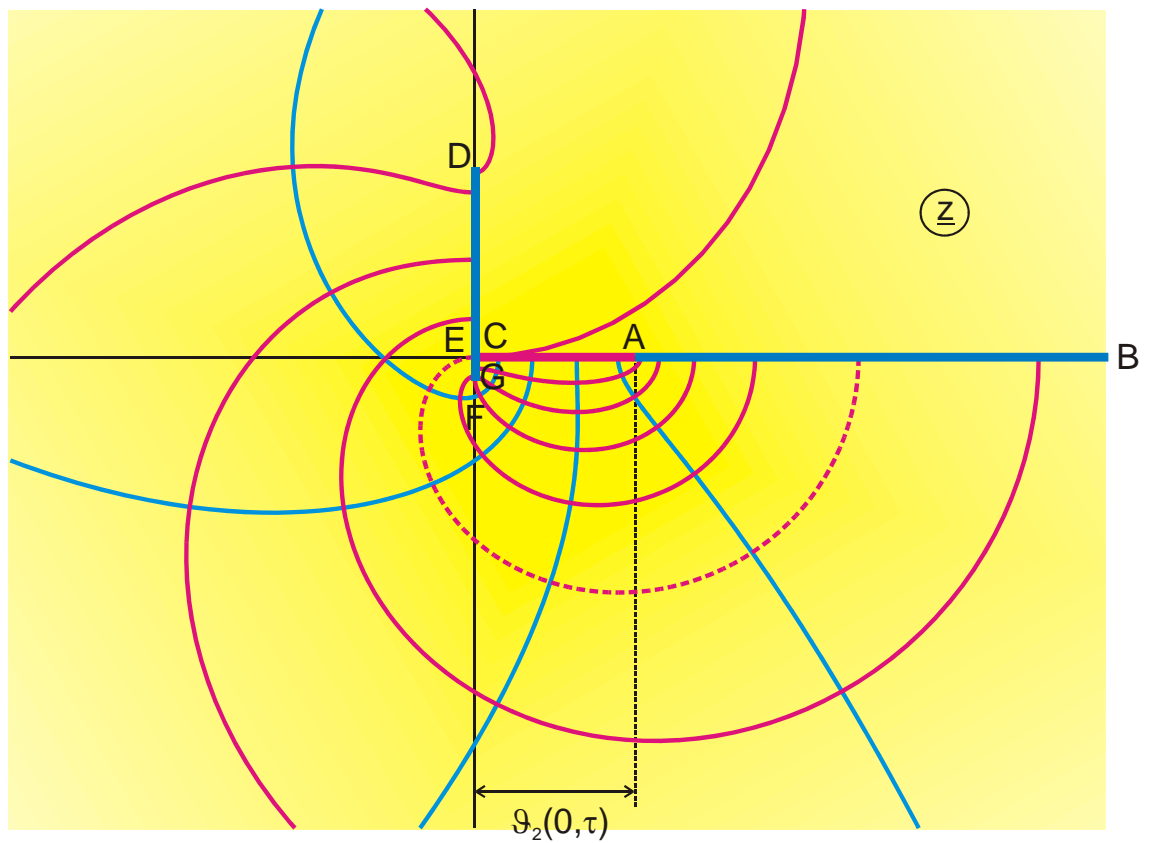


Bild 13.3: Die Abbildung $\underline{z} = \vartheta_2(\underline{z}, \tau)$, mit $\tau = 0,278$

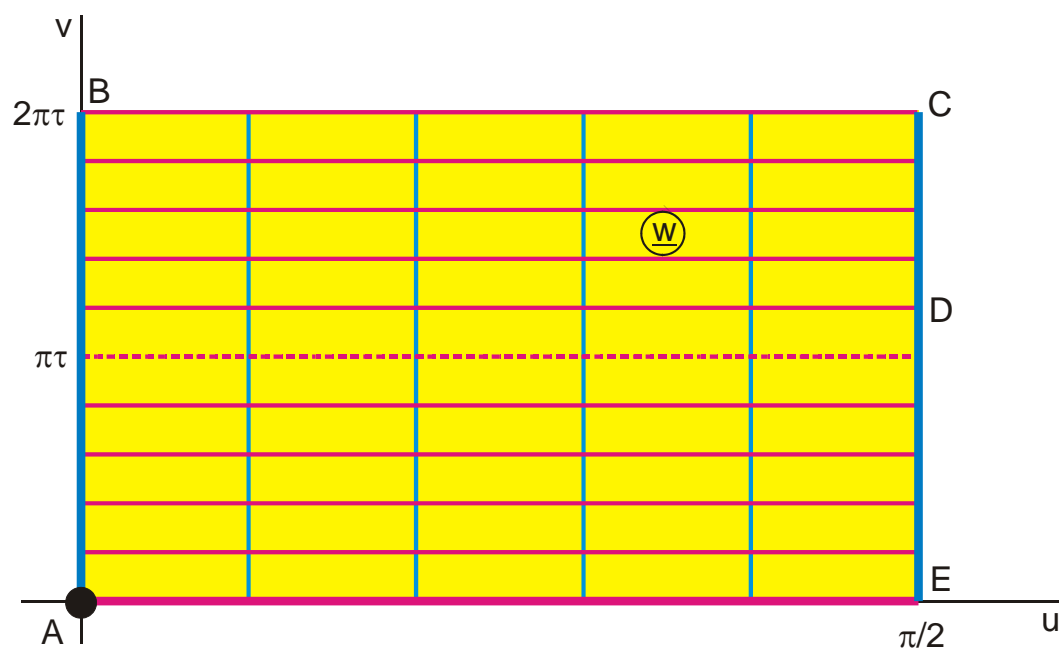
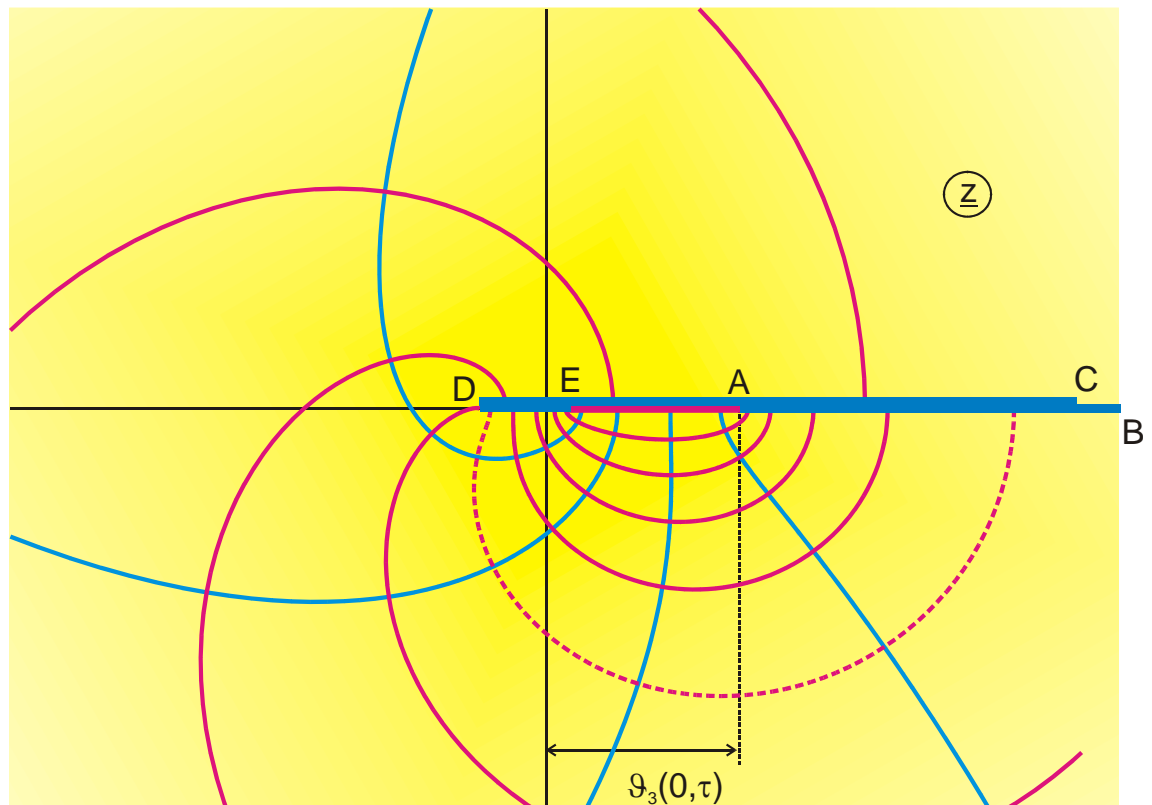


Bild 13.4: Die Abbildung $\underline{z} = \vartheta_3(\underline{z}, \tau)$, mit $\tau = 0,278$

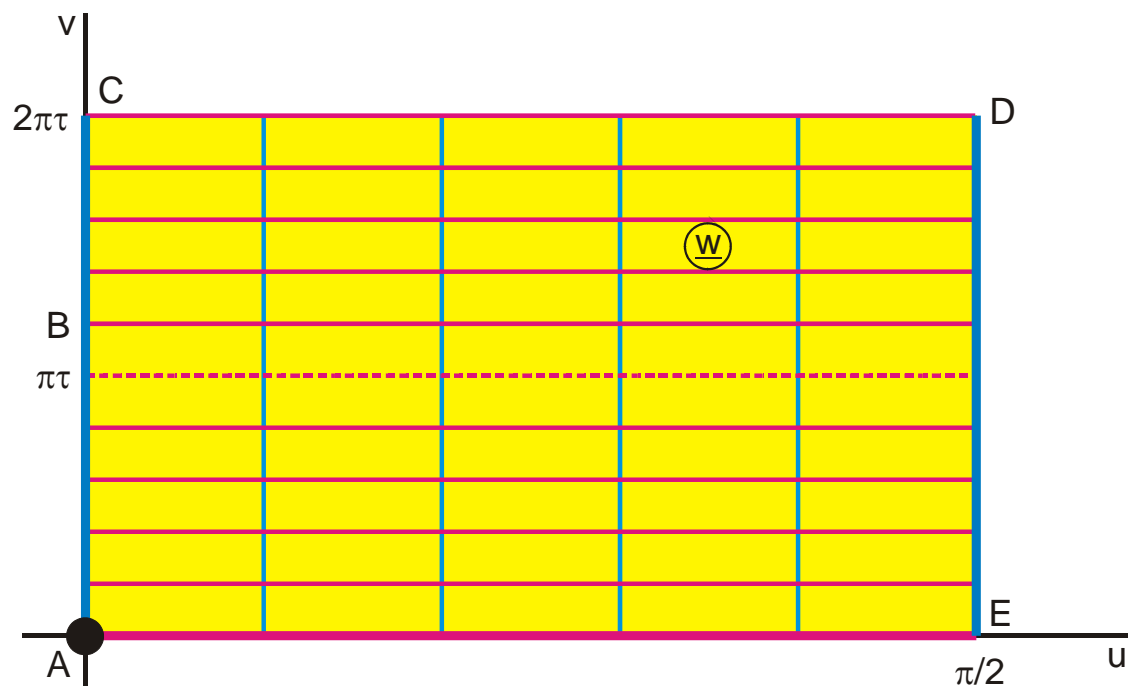
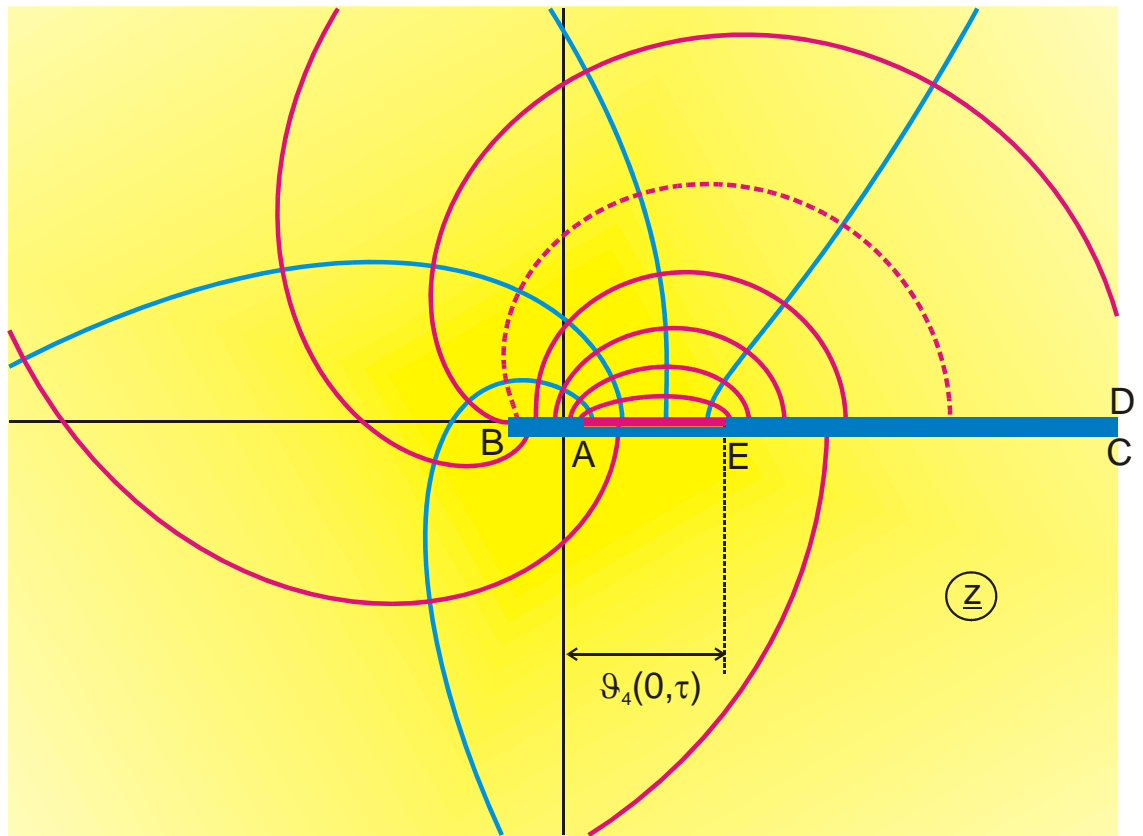


Bild 13.5: Die Abbildung $\underline{z} = \vartheta_4(\underline{w}, \tau)$, mit $\tau = 0,278$

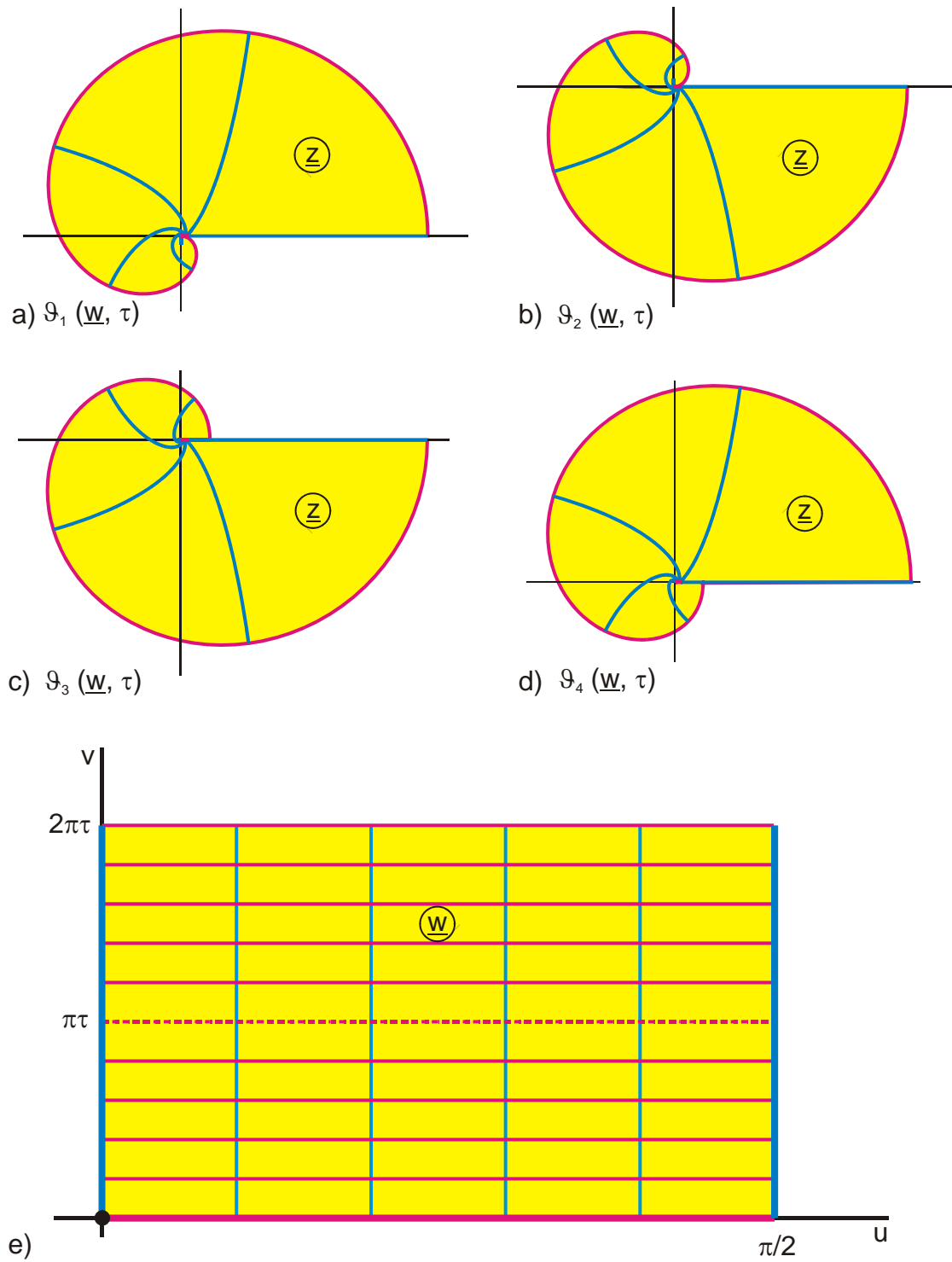


Bild 13.6: Vollständiger Abbildungsbereich der vier Theta-Funktionen

Drückt man die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen aus und setzt $q = \exp(-\pi/\tau)$, so ergibt sich:

$$\vartheta_1(\underline{z}, \tau) = -j \exp(-\pi\tau/4) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau n(n+1) + j(2n+1)\underline{z} + jn\pi) \quad (12)$$

$$\vartheta_2(\underline{z}, \tau) = \exp(-\pi\tau/4) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau n(n+1) + j(2n+1)\underline{z}) \quad (13)$$

$$\vartheta_3(\underline{z}, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau n^2 + j2n\underline{z}) \quad (14)$$

$$\vartheta_4(\underline{z}, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau n^2 + j2n\underline{z} + jn\pi) \quad (15)$$

Die Umrechnung von einer Theta-Funktion zur anderen erfolgt über:

$$\vartheta_1(\underline{z}) = -\vartheta_2(\underline{z} + \pi/2) \quad (16)$$

$$\vartheta_2(\underline{z}) = \vartheta_1(\underline{z} + \pi/2) \quad (17)$$

$$\vartheta_3(\underline{z}) = \vartheta_4(\underline{z} + \pi/2) \quad (18)$$

$$\vartheta_4(\underline{z}) = \vartheta_3(\underline{z} + \pi/2) \quad (19)$$

Von besonderer Bedeutung für die Anwendung sind die Funktionswerte für $z = 0$:

$$\vartheta_1(z = 0, \tau) = \vartheta_1(\tau) = 0 \quad (20)$$

$$\vartheta_2(z = 0, \tau) = \vartheta_2(\tau) = \sqrt{2kK(k)/\pi} \quad (21)$$

$$\vartheta_3(z=0, \tau) = \vartheta_3(\tau) = \sqrt{2K(k) / \pi} \quad (22)$$

$$\vartheta_4(z=0, \tau) = \vartheta_4(\tau) = \sqrt{2k'K(k) / \pi} \quad (23)$$

Mit Hilfe der Theta-Nullwerte ist es möglich, bei gegebenem Seitenverhältnis τ den Modul k einer elliptischen Funktion zu berechnen:

$$k = [\vartheta_2(0, \tau) / \vartheta_3(0, \tau)]^2. \quad (24)$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0, \tau) \quad (25)$$

Alle elliptischen Funktionen lassen sich durch Theta-Funktionen ausdrücken:

$$\operatorname{sn}(z, k) = \frac{\vartheta_3(\tau) \vartheta_1(z, \tau)}{\vartheta_2(\tau) \vartheta_4(z, \tau)} \quad (26)$$

$$\operatorname{cn}(z, k) = \frac{\vartheta_4(\tau) \vartheta_2(z, \tau)}{\vartheta_2(\tau) \vartheta_4(z, \tau)} \quad (27)$$

$$\operatorname{dn}(z, k) = \frac{\vartheta_4(\tau) \vartheta_3(z, \tau)}{\vartheta_3(\tau) \vartheta_4(z, \tau)} \quad (28)$$

$$\frac{\operatorname{cn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k)}{\operatorname{sn}(z, k)} = k' \frac{\vartheta_2(z, \tau) \vartheta_3(z, \tau)}{\vartheta_1(z, \tau) \vartheta_4(z, \tau)} \quad (29)$$

$$\frac{\operatorname{sn}(z, k) \operatorname{cn}(z, k)}{\operatorname{dn}(z, k)} = \frac{1}{k} \frac{\vartheta_1(z, \tau) \vartheta_2(z, \tau)}{\vartheta_3(z, \tau) \vartheta_4(z, \tau)} \quad (30)$$

$$\frac{\operatorname{sn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k)}{\operatorname{cn}(z, k)} = \frac{\vartheta_1(z, \tau) \vartheta_3(z, \tau)}{\vartheta_2(z, \tau) \vartheta_4(z, \tau)} \quad (31)$$

Zusammenhang mit den elliptischen Integralen:

$$\frac{d}{dz} \ln \vartheta_1(z, \tau) = Z_e(z, k) + \frac{\operatorname{cn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k)}{\operatorname{sn}(z, k)} \quad (32)$$

$$\frac{d}{dz} \ln \vartheta_2(z, \tau) = Z_e(z, k) - \frac{\operatorname{sn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k)}{\operatorname{cn}(z, k)} \quad (33)$$

$$\frac{d}{dz} \ln \vartheta_3(z, \tau) = Z_e(z, k) - k^2 \frac{\operatorname{sn}(z, k) \operatorname{cn}(z, k)}{\operatorname{dn}(z, k)} \quad (34)$$

$$\frac{d}{dz} \ln \vartheta_4(z, \tau) = Z_e(z, k) \quad (35)$$

$$\Pi_j(z, k, a) = \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K(k)}(z-a), \tau\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi}{2K(k)}(z+a), \tau\right)} + z Z_e(a, k) \quad (36)$$

Wegen des Terms mit $\exp(\dots n^2)$ in der Reihendarstellung der Theta-Funktionen konvergieren die Reihen außergewöhnlich gut. Diese Eigenschaft kann man nutzen, um sehr genaue Näherungsformeln mit elementaren Funktionen abzuleiten [8]. Berücksichtigt man nur das 1. Glied der Reihe in Gl. (8), so ergibt sich aus Gl. (10) und (22):

$$\frac{K(k)}{K'(k)} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{2+2\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \quad \text{für} \quad k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

$$\frac{K(k)}{K'(k)} \approx \frac{\pi}{\ln \frac{2+2\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}} \quad \text{für} \quad k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

mit der Umkehrung

$$k \approx \left(\frac{\exp\left(\frac{\pi K(k)}{K'(k)}\right) - 2}{\exp\left(\frac{\pi K(k)}{K'(k)}\right) + 2} \right)^2 \quad \text{für } K(k) \geq K'(k) \quad (39)$$

$$k' \approx \left(\frac{\exp\left(\frac{\pi K'(k)}{K(k)}\right) - 2}{\exp\left(\frac{\pi K'(k)}{K(k)}\right) + 2} \right)^2 \quad \text{für } K(k) \leq K'(k) \quad (40)$$

beziehungsweise

$$k \approx \frac{4 \sqrt{\exp\left(\frac{\pi K'(k)}{K(k)}\right) \left(\exp\left(\frac{2\pi K'(k)}{K(k)}\right) + 4 \right)}}{\left(\exp\left(\frac{\pi K'(k)}{K(k)}\right) + 2 \right)^2} \quad (41)$$

$$K(k) \approx \frac{2}{(1 + \sqrt{k})^2} \ln \frac{2 + 2\sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \quad \text{für } k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (42)$$

$$K'(k) \approx \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{k})^2} \quad \text{für } k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (43)$$

$$K(k) \approx \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{k'})^2} \quad \text{für } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (44)$$

$$K'(k) \approx \frac{2}{(1 + \sqrt{k'})^2} \ln \frac{2 + 2\sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \quad \text{für } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (45)$$

Der relative Fehler, der sich hieraus ergebenden Näherungswerte ist für $k > 10^{-5}$ kleiner als 10^{-5} .

Die Theta-Funktionen lassen sich auch als unendliches Produkt darstellen:

$$\vartheta_1(\underline{z}, \tau) = 2 e^{-\pi\tau/4} \sin \underline{z} \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - e^{-2n\pi\tau}\} \{1 - 2 e^{-2n\pi\tau} \cos(2\underline{z}) + e^{-4n\pi\tau}\} \quad (46)$$

$$\vartheta_2(\underline{z}, \tau) = 2 e^{-\pi\tau/4} \cos \underline{z} \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - e^{-2n\pi\tau}\} \{1 + 2 e^{-2n\pi\tau} \cos(2\underline{z}) + e^{-4n\pi\tau}\} \quad (47)$$

$$\vartheta_3(\underline{z}, \tau) = \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - e^{-2n\pi\tau}\} \{1 + 2 e^{-(2n-1)\pi\tau} \cos(2\underline{z}) + e^{-2(2n-1)\pi\tau}\} \quad (48)$$

$$\vartheta_4(\underline{z}, \tau) = \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - e^{-2n\pi\tau}\} \{1 - 2 e^{-(2n-1)\pi\tau} \cos(2\underline{z}) + e^{-2(2n-1)\pi\tau}\} \quad (49)$$

Auch diese Schreibweise lässt sich physikalisch anschaulich interpretieren: Der Logarithmus der Theta-Funktionen ist das komplexe Potential von doppelt periodischen Anordnungen gleichnamiger Linienquellen entsprechend Bild 13.7a bis 13.7d. In jedem Punkt \underline{z} ergibt sich das komplexe Potential \underline{w} als Summe der Potentialanteile von jeder einzelnen Linienladung (s. Tab. 3.1)

$$\underline{w} = C \sum_n \ell \ln \underline{z}_n . \quad (50)$$

Dieser Ausdruck lässt sich umwandeln in ein unendliches Produkt:

$$\underline{w} = C \ln \prod_n \underline{z}_n \quad (51)$$

An diesem Beispiel wird deutlich, warum die Reihen- bzw. Produktglieder so gut konvergieren: Das Potential in einem Punkt \underline{z} wird im wesentlichen von den unmittelbar benachbarten Linienladungen festgelegt. Die Potentialanteile der restlichen Linienladungen werden mit zunehmender Entfernung sehr schnell kleiner. Zudem sieht man, warum die Funktion mit zunehmendem Imaginärteil immer größer wird. Durch die Festlegung, daß die Ebene $y = 0$ eine rote Feldlinie ist, verlaufen alle Feldlinien in der oberen Halbebene in Richtung $+j\infty$ (Bild 13.8). Bei jedem Fortschreiten um die Strecke τ in y -Richtung vergrößert sich die Anzahl der Feldlinien um diejenigen der damit neu hinzugekommenen Linienladung. Die Dichte der Feldlinien steigt mit zunehmendem y exponentiell an.

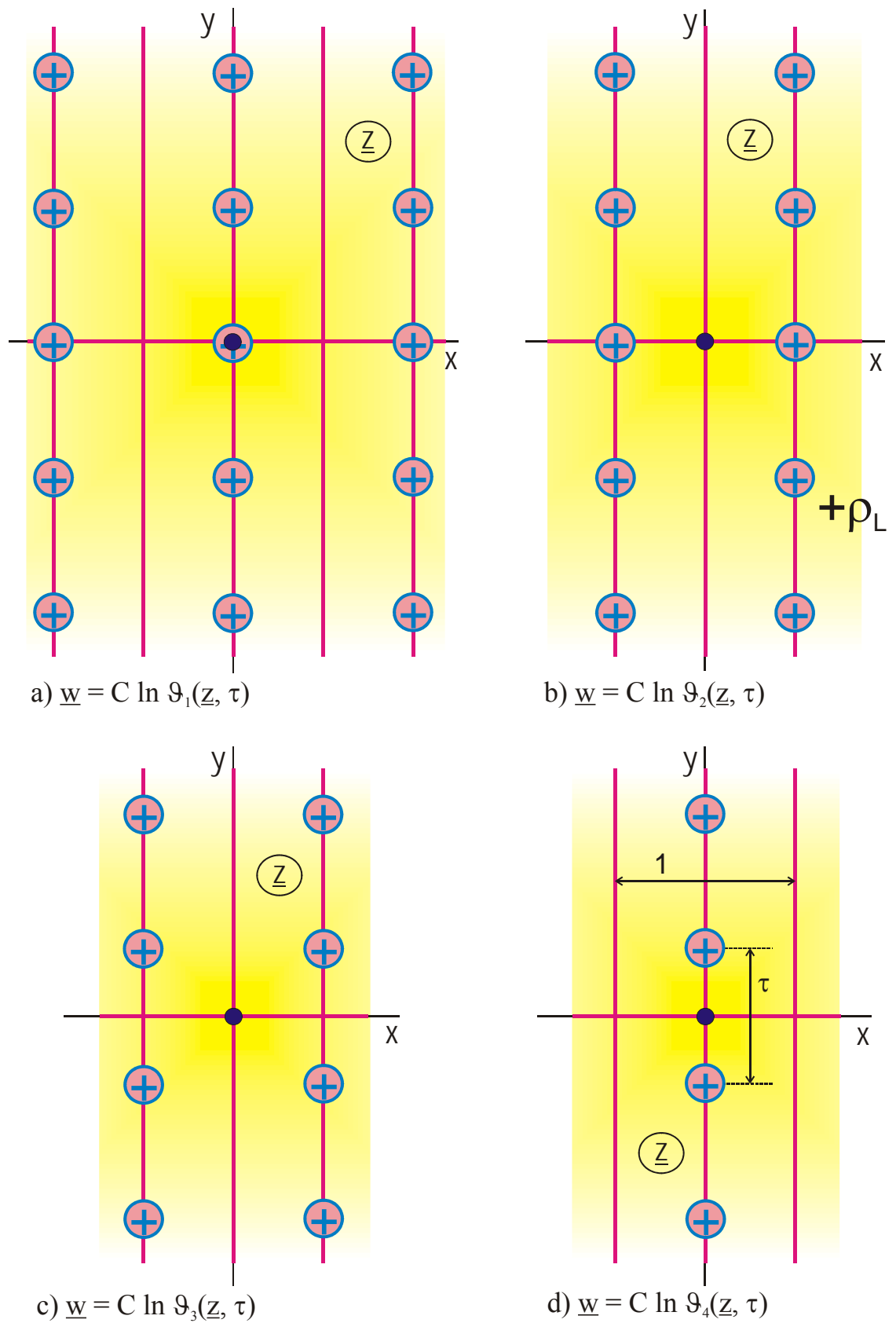


Bild 13.7: Anordnung der positiven Linienladungen in der z -Ebene für die Abbildung $w = C \ln \vartheta(z, \tau)$

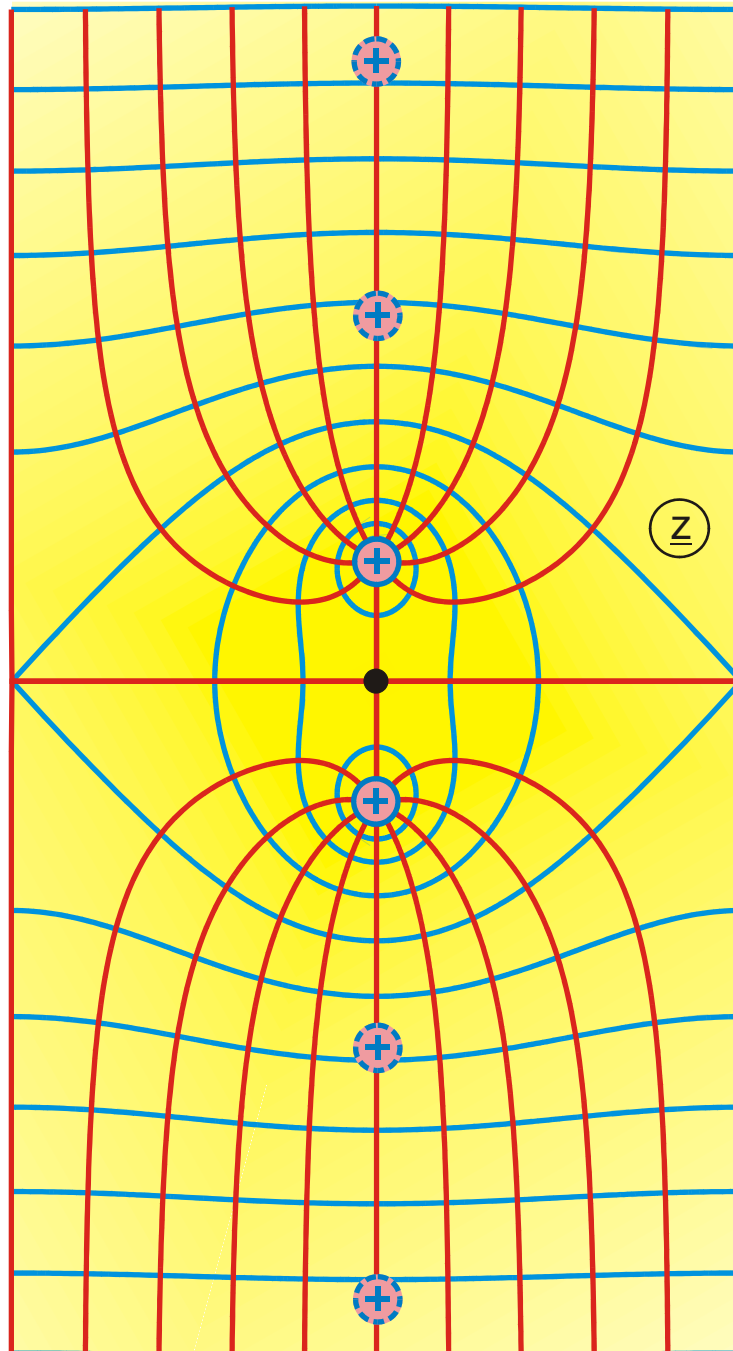


Bild 13.8: Felddiagramm der beiden Linienladungen in Bild 13.7 d), die dem Koordinatenursprung am nächsten sind. Das Feld der restlichen Linienladungen (gestrichelt eingetragen) wurde der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Wegen der Periodizität des Feldes in x-Richtung verlaufen die Feldlinien aller Linienladungen innerhalb des vertikalen Parallelstreifens der Breite 1.

14. Anwendungen

Aufgabe 1: Elektrische Feldstärke

Das ebene elektrostatische Feld in einer Innenkante mit dem Öffnungswinkel 60° lässt sich mit der Abbildungsfunktion $\underline{z} = \sqrt[3]{\underline{w}}$ berechnen. Das abgewinkelte Blech mit dem Potential $V = \text{const}$ geht dadurch über in die reelle Achse der \underline{w} -Ebene.

- In welche Punkte der z -Ebene werden die Punkte $u_1 = 0,5$, $v_1 = 0$ und $u_2 = 1$, $v_2 = 0$ abgebildet, wenn der Punkt $u = 1$, $v = 0$ in den Punkt $x = 1$, $y = 0$ übergeht?
- Skizzieren Sie den Verlauf der in der \underline{w} -Ebene eingezeichneten Feldlinien ($u=\text{const}$) und Potentiallinien ($v=\text{const}$) in der \underline{z} -Ebene.
- Berechnen Sie die Feldstärkeverteilung E als Funktion von x und y .

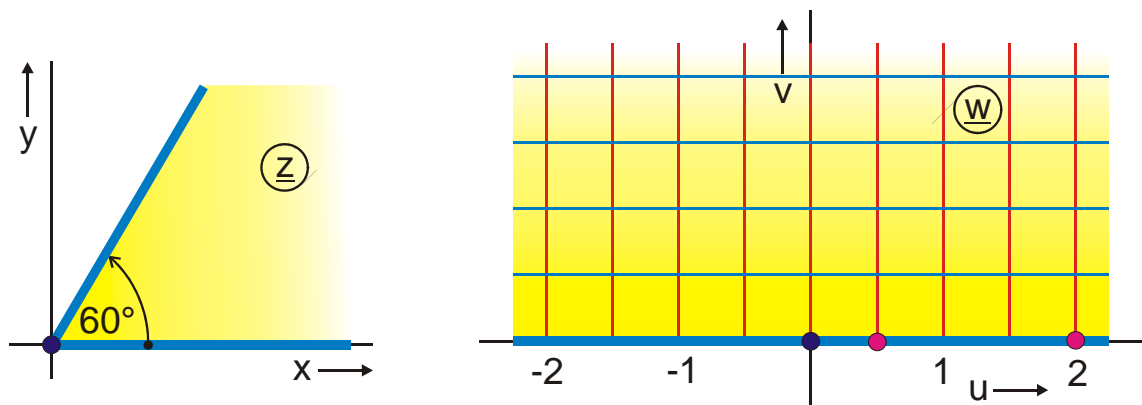


Bild 14.1: Aufgabe 1

Lösung:

- Einsetzen in die Abbildungsfunktion $x + jy = \sqrt[3]{u + jv}$ ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,794, & y_1 &= 0 \\ x_2 &= 1,26, & y_2 &= 0 \end{aligned}$$

-

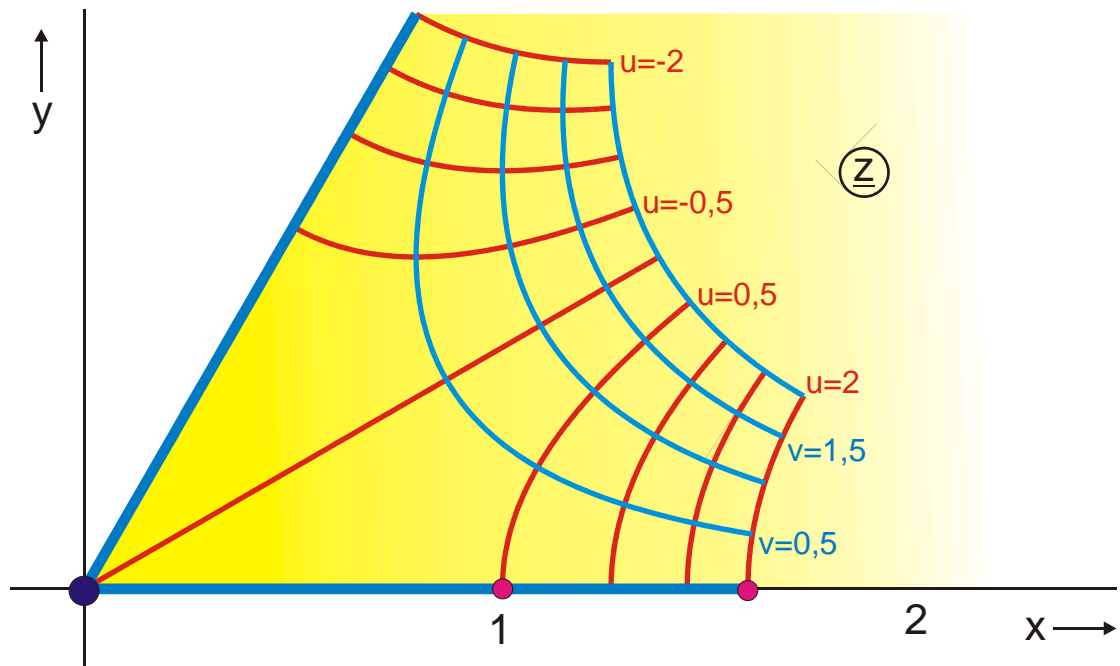


Bild 14.2: Lösung zu Aufgabe 1b

c) Die Linien $v=\text{const}$ sind die Potentiallinien. Dann gilt:

$$\vec{E} = -E_0 \text{grad } v$$

$$\vec{E}(x, y) = -E_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \right)$$

$$\text{aus } u + jv = (x + jy)^3 \text{ folgt } v = 3x^2y^2 - y^3$$

$$\vec{E}(x, y) = -E_0 \left(6xy \vec{e}_x + [3x^2 - 3y^2] \vec{e}_y \right)$$

$$E(x, y) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 3E_0(x^2 + y^2)$$

Aufgabe 2: Ohmscher Widerstand, Potentialverlauf

Aus einem $d = 1 \text{ mm}$ dicken Widerstandsmaterial (Leitfähigkeit $\sigma = 10^4 \text{ S/m}$) ist ein Kreisringsektor ausgeschnitten und an den Enden bei $\varphi = 0^\circ$ und bei $\varphi = 45^\circ$ kontaktiert ($r_i = 1 \text{ cm}$, $r_a = 10 \text{ cm}$). Berechnen Sie den Widerstand der Anordnung durch konforme Abbildung mit der Funktion $\underline{w} = \underline{C}_1 \ln(\underline{z}/\underline{C}_2)$.

- Wählen Sie zwei Punkte der Randkurve und bestimmen Sie daraus die Konstanten \underline{C}_1 und \underline{C}_2 .
- Berechnen Sie den ohmschen Widerstand der Anordnung in der Bildebene nach der Formel $R = \frac{1}{d\sigma} \cdot \frac{\text{Länge in der } w\text{-Ebene}}{\text{Breite in der } w\text{-Ebene}}$.
- Skizzieren Sie den Verlauf der Feldlinien und der Äquipotentiallinien in der \underline{z} -Ebene.
- Berechnen Sie den Potentialverlauf $U(\underline{w})$ und $U(\underline{z})$.
- Welchen Wert muß r_i bzw. r_a annehmen, damit der Widerstand halb so groß ist?

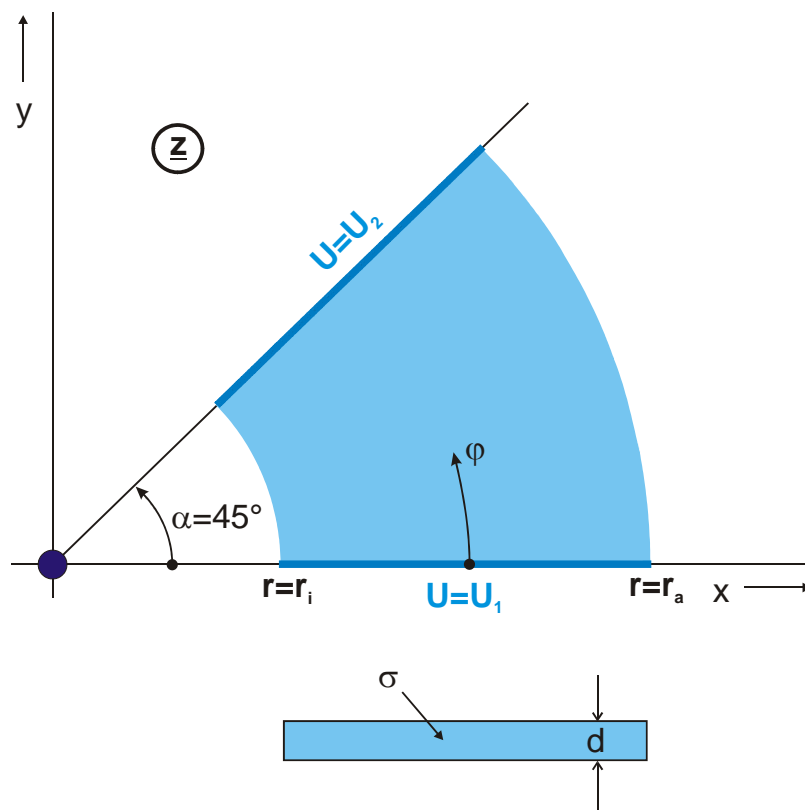


Bild 14.3: Aufgabe 2

Lösung:

- Eckpunkte in der \underline{z} -Ebene bezeichnen und Umlaufsinn festlegen.
- Das Kreisbogensegment in der \underline{z} -Ebene wird auf ein Rechteck in der \underline{w} -Ebene abgebildet. Lage und Größe des Rechtecks in der \underline{w} -Ebene können frei gewählt werden. 2 Punkte und der Umlaufsinn werden gewählt:

$$A(\underline{w}) = 0 \quad \text{und} \quad D(\underline{w}) = \lambda$$

Damit ergeben sich die Konstanten zu:

$$\text{Punkt A:} \quad 0 = \underline{C}_1 \ln(r_i / \underline{C}_2) \quad \Rightarrow \quad \underline{C}_2 = r_i$$

$$\text{Punkt D:} \quad \lambda = \underline{C}_1 \ln(r_i e^{j\alpha} / r_i) \quad \Rightarrow \quad \underline{C}_1 = \lambda / (j\alpha)$$

Zur Vereinfachung der Abbildungsfunktion wird die frei gewählte Konstante $\lambda = \alpha$ gesetzt. Eingesetzt in die Abbildungsfunktion ergibt sich:

$$\underline{w} = j \ln(r_i / \underline{z})$$

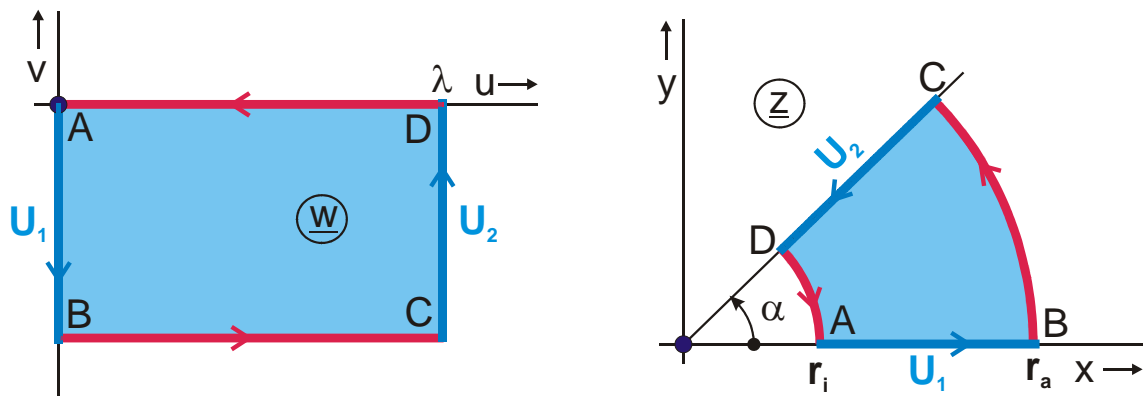
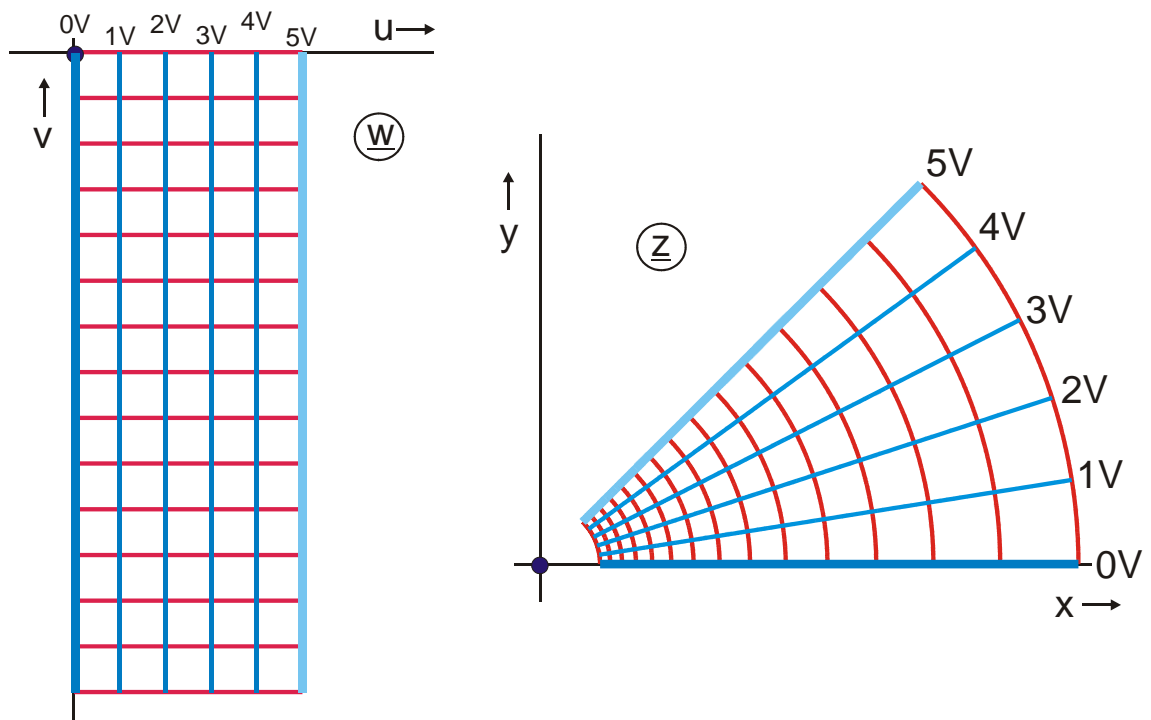


Bild 14.4: Aufgabe 2, Lösung a, b

Einsetzen der Punkte $B(z) = r_a$ und $C(z) = r_a e^{j\alpha}$ ergibt, daß das Rechteck in der \underline{w} -Ebene die Länge α und die Breite $\ln(r_a / r_i)$ hat. Damit wird der ohmsche Widerstand R zu:

$$R = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{\alpha}{\ln(r_a / r_i)}$$

c)

**Bild 14.5: Feldlinien (rot) und Potentiallinien (blau)**

d) Lineare Potentialverteilung in der \underline{w} -Ebene (Geradengleichung):

$$U(u) = U_1 + (U_2 - U_1) u/\alpha.$$

$U(z)$ wird in Polarkoordinaten dargestellt. Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

ergibt sich die Abbildungsfunktion $\underline{w} = \varphi - j \ln (r/r_i)$ und:

$$U(\varphi) = U_1 + (U_2 - U_1) \varphi/\alpha.$$

e) Zur Halbierung des Widerstands müssen nach innen bzw. nach außen gleich viele Kästchen parallelgeschaltet werden:

- $R/2$ für $r_a = 10 \text{ cm}$ und $r_i = 0,1 \text{ cm}$
- $R/2$ für $r_i = 1 \text{ cm}$ und $r_a = 100 \text{ cm}$.

Aufgabe 3: Kapazität, Leitungswellenwiderstand

Gegeben ist ein $w = 10 \text{ mm}$ breiter, dünner Leiterstreifen, der in der Höhe $h = 5 \text{ mm}$ parallel zu einer leitenden Ebene verläuft. Der Streifen ist eingebettet in ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 2$.

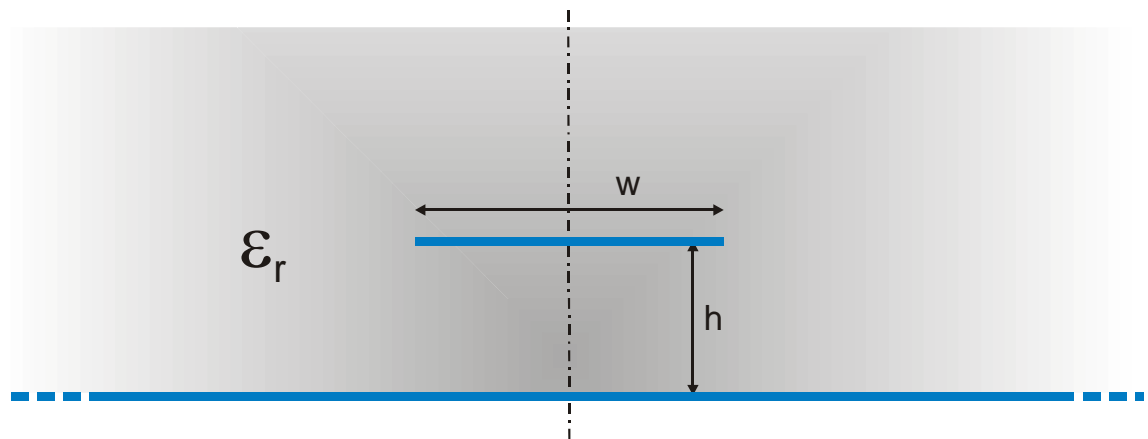


Bild 14.6: Aufgabe 3

- Wie groß ist die Kapazität pro Längeneinheit C' ?
- Wie groß ist der Leitungswellenwiderstand Z_L der Anordnung?

Lösung:

- Nach Abbildung E 2 wird die rechte Hälfte der Anordnung auf ein Rechteck mit den Abmessungen $K(k) \times K'(k)$ abgebildet.

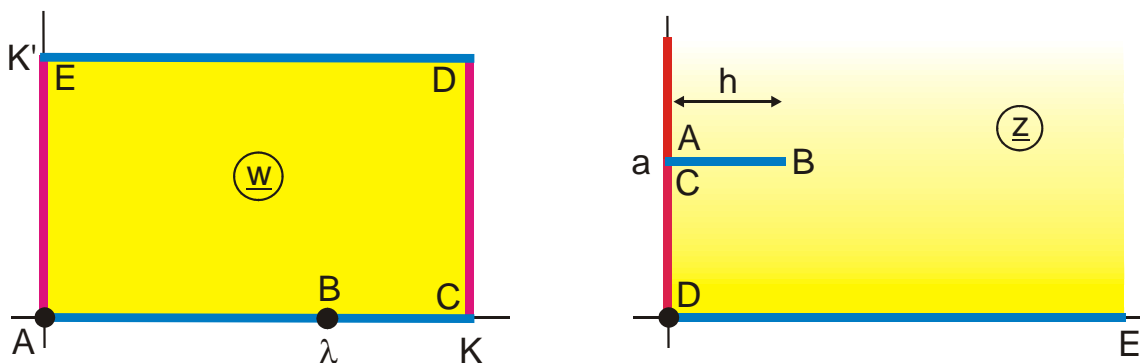


Bild 14.7: Abbildung E 2

Da die Kapazität in der \underline{z} -Ebene genauso groß ist wie in der \underline{w} -Ebene, wird sie im homogenen Feld der \underline{w} -Ebene berechnet:

$$C' = 2 \epsilon_0 \epsilon_r K(k)/K'(k)$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die Kapazität der linken Hälfte der Anordnung. Da sich der Modul k nicht direkt aus h und a berechnen läßt, wird k aus Programm E 2 durch Probieren ermittelt:

$$k = 0,98963 \text{ für } h = a = 0,47$$

Mit Gl. (13.37) ergibt sich $K(k)/K'(k) = 2,1$ und damit $C' = 74,9 \text{ pF/m}$ ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).

b) Der Leitungswellenwiderstand Z_L der Anordnung ergibt sich aus

$$Z_L = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c_0 C'}$$

mit $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ zu $Z_L = 62,95 \Omega$.

Aufgabe 4: Grafische Auswertung des Feldbildes

Gegeben ist das Feldbild eines runden Leiters in Luft über einer leitenden Ebene bzw. eine Hälfte des Feldbildes einer symmetrischen Zweidrahtleitung (Bild 14.8). Aus diesem Feldbild sollen die Eigenschaften des Feldes ermittelt werden. Der Leiterdurchmesser ist $2r_0 = 10 \text{ mm}$. Damit ergibt sich der Abstand des Leitermittelpunktes von der Ebene durch Ausmessen des Feldbildes zu $d = 15 \text{ mm}$. Zwischen dem Leiter und der leitenden Ebene liegt eine hochfrequente Spannung von $U = 100 \text{ V}$ (extremer Skineneffekt). Die Leitung ist am Ende reflexionsfrei abgeschlossen,

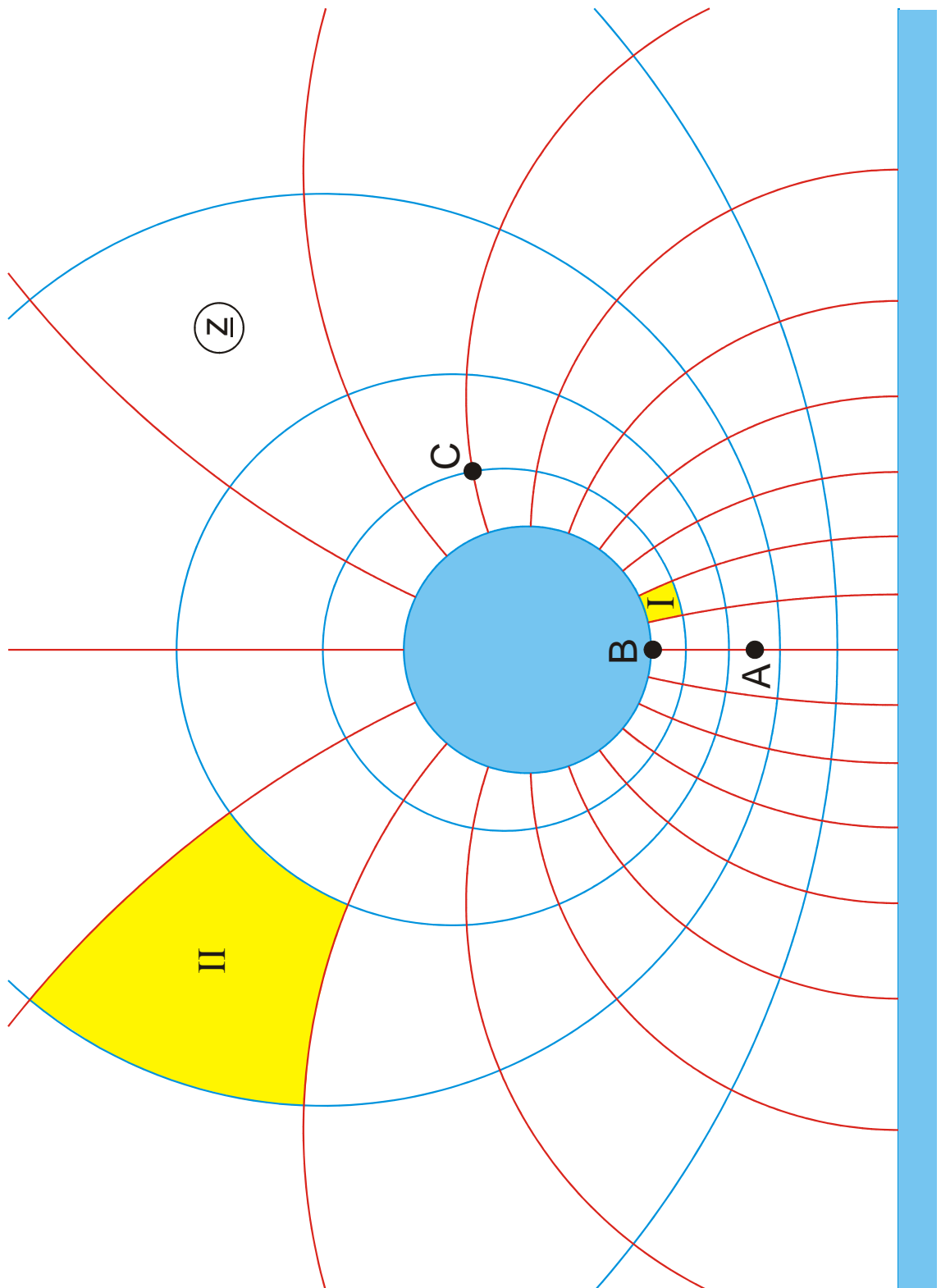


Bild 14.8: Aufgabe 4, Abbildung E 1.1 mit $u_C = 0,28$

a) Wie groß ist der Kapazitätsbelag C' der Leitung?

Lösung: $C' = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{m}{n} \frac{\Delta v}{\Delta u} = 31,6 \text{ pF} / \text{m}$

mit: $\varepsilon_0 = 8,854 \text{ pF/m}$ $\varepsilon_r = 1$
 $n = 5$ (Anzahl der Rechtecke vom Leiter zur Ebene)
 $m = 20$ (Anzahl der Rechtecke um den Leiter herum)
 $\Delta u / \Delta v = u_C / 0,25 = 1,12$ (Seitenverhältnis der Rechtecke, in beiden Ebenen gleich groß)

Im homogenen Feld der w -Ebene ist jedes Rechteck ein Plattenkondensator mit der Kapazität $C_0' = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\Delta v}{\Delta u} = 7,9 \text{ pF} / \text{m}$. Es sind n Kondensatoren in Reihe und m Kondensatoren parallel geschaltet.

b) Wie groß ist der Leitungswellenwiderstand?

Lösung: $Z_L = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{n}{m} \frac{\Delta u}{\Delta v} = 105,6 \Omega$

mit: $Z_0 = 377 \Omega$

c) Wie groß ist der Leiterstrom I ?

Lösung: $I = U / Z_L = 947 \text{ mA}$

d) Wie groß ist die elektrische Feldstärke im Punkt A?

Lösung: $E_A = \frac{20 \text{ V}}{8 \text{ mm} \cdot M} = 9,6 \text{ V} / \text{mm}$

mit: $M = 2r_0 / 38,4 \text{ mm} = 0,26$ (Maßstabsfaktor Realität:Feldbild)

Zwischen zwei benachbarten Potentiallinien beträgt die Spannung 20V. Ihr Abstand beträgt im Feldbild 8 mm, in der Realität 8 mm x M.

e) Wie groß ist die Oberflächenstromdichte im Punkt B?

Lösung: $K_B = \frac{I}{m \Delta b} = \frac{947 \text{ mA}}{20 \cdot 4 \text{ mm} \cdot M} = 45,5 \text{ mA} / \text{mm}$

Der Strom, der im Oberflächenbereich zwischen zwei benachbarten Feldlinien fließt, ist überall gleich groß, nämlich $\Delta I = I/m = 47,35 \text{ mA}$. Mit der vereinfachenden Annahme einer homogenen Verteilung in diesem relativ kleinen Oberflächenbereich ergibt sich die Oberflächenstromdichte zu $K_B = \Delta I/\text{Leiterbreite } \Delta b$. Mit dem im Feldbild gemessenen Abstand von 4 mm zwischen zwei Feldlinien wird Δb zu $4 \text{ mm} \times M = 1,04 \text{ mm}$.

f) Wie groß ist die Strahlungsdichte im Punkt C?

Lösung:
$$S_c = \frac{1}{2} \frac{E_c^2}{Z_0} = 48 \frac{\text{mW}}{\text{mm}^2} \quad \text{mit} \quad E_c = \frac{20\text{V}}{M (10\text{mm} + 15,5\text{mm})/2} = 6 \frac{\text{V}}{\text{mm}}$$

g) Wieviel Leistung wird im Rechteckquerschnitt I und wieviel wird im Rechteckquerschnitt II transportiert?

Lösung: In allen Rechteckquerschnitten wird die gleiche Leistung transportiert, nämlich

$$\Delta P = \frac{P}{m \cdot n} = \frac{47,35 \text{ W}}{100} = 473,5 \text{ mW} \quad \text{mit} \quad P = \frac{1}{2} U I .$$

h) Welcher Anteil der Gesamtleistung wird in dem in Bild 14.8 dargestellten Querschnitt transportiert?

Lösung: Von den insgesamt $m \times n = 100$ Rechteckquerschnitten sind in der Zeichnung etwa $2 \times 45,5 = 91$ dargestellt. Damit wird im dargestellten Querschnitt etwa 91 % der Gesamtleistung transportiert. Die restlichen 9 % verteilen sich auf den gesamten oberen Halbraum außerhalb der Zeichnungsfläche.

15. Abbildungsverzeichnis

Elementare und spezielle Funktionen

Funktion	Abbildungs-Nr.
$1/w$	Q1
w^φ	A 1.1
e^φ	B 1
$\ln w$	H 1
\arcsin	H 1.5
\tanh	E 1
\sin	B 2
\cosh	B 2
arcosh	A 7
$1/\sqrt{w}$	U 7.1
$1/w^2$	U 7
sn	E 3
cn	P 4
Z_e	E 2
Z_t	S 2
Z_a	A 11.1
Z_t	S 2
F_a	Q 4
F_t	I 1.2

Funktion	Abbildungs-Nr.
E_t	C 3.1
E_a	A 10
E_e	U 5
B_t	U 1
B_a	A 10.2
B_e	U 1.1
D_t	U 2
D_a	U 2.1
D_e	U 2.2
Π_t	U 4.1
Π_a	U 4.2
Π_e	U 4.3
Π_j	U 3
Λ	C 3.2
\mathfrak{g}_1	U 6.1
\mathfrak{g}_2	U 6.2
\mathfrak{g}_3	U 6.3
\mathfrak{g}_4	U 6.4

Elementare und spezielle Kurven

Name	Abbildungs-Nummer
Konzentrische Kreise	B 1
Parabeln	A 1.2
Hyperbeln	A 1.1 für $\varphi = 90^\circ$
Konfokale Ellipsen	B 2
Konfokale Hyperbeln	B 2
Bipolares Koordinatensystem	E 1
Inverse Ellipsen	P 1.1
Cassinische Kurven	S 1
Inverse cassinische Kurven	P 1
Lemniskate	S 1, Kurve durch $z = 0$; B 3.5
Kardioiden	U 7
Maxwell-Kurven	C 2; D 1.1 für $e = 0$
4-Leaf-Roses	U 7.1
Rogowski-Profil	C 2, Mittellinie mit $v = 0,5$
π -Borda-Profil	N 2.2
$\pi/2$ -Borda-Profil	N 2
Joukowski-Profil	R 7.1 für $b = 0$
Kármán-Trefftz-Profil	R 7.2 für $b = 0$
Kreise des Apollonius	E 1

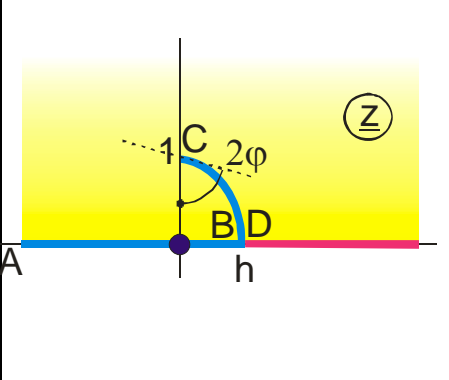
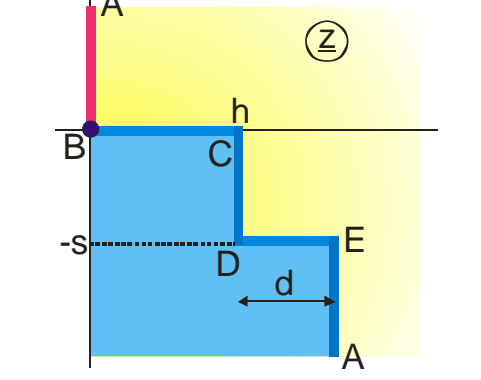
Gruppe A: Eine unendlich ausgedehnte, leitende Oberfläche

A 1	A 2.1	A 3.2
		<p>Ellipse</p>
A 1.1	A 2.3	A 3.3
		<p>Kreisbogen</p>
A 1.2	A 3	A 3.4
	<p>Kreisbogen, Radius 1</p>	<p>Kreisbogen, Radius r</p>
A 2	A 3.1	A 3.4
	<p>Kreisbogen, Radius 1</p>	<p>Kreisbogen, Radius r</p>

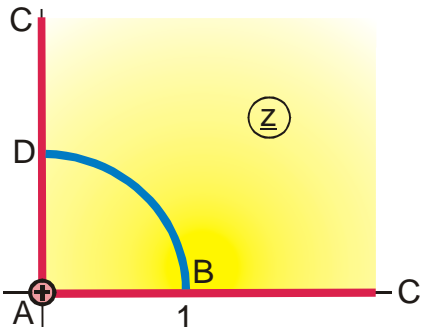
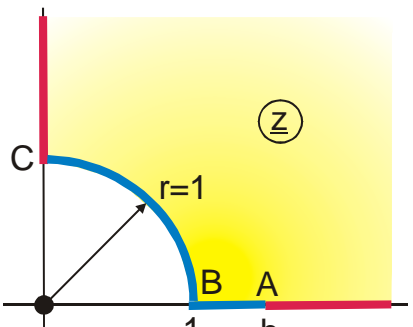
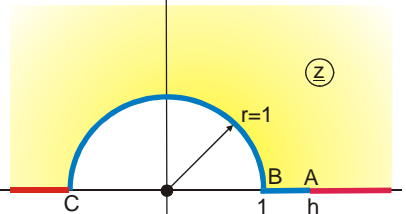
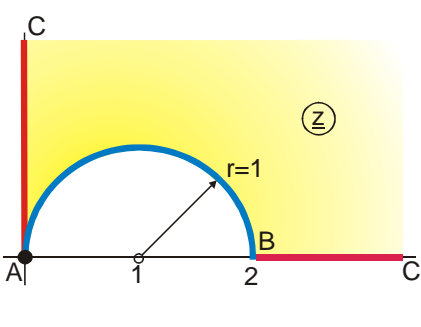
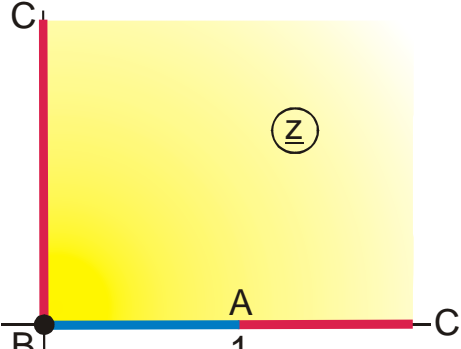
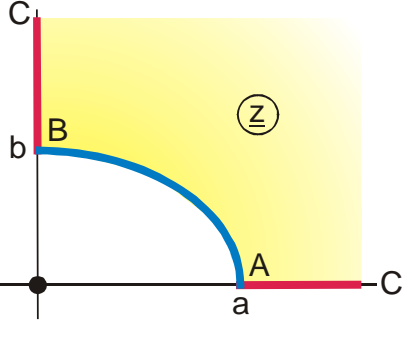
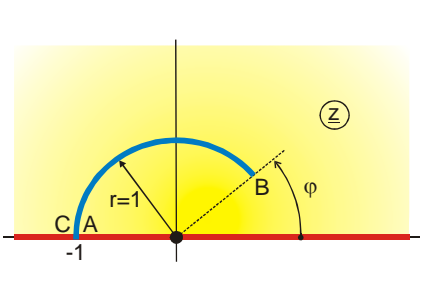
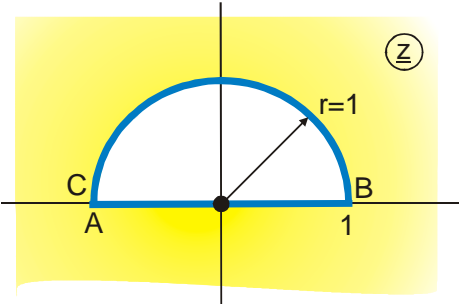
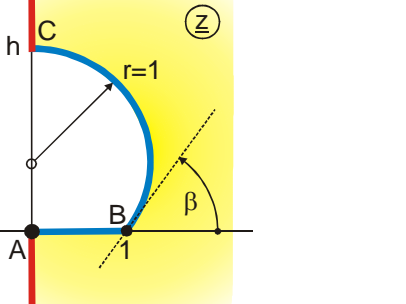
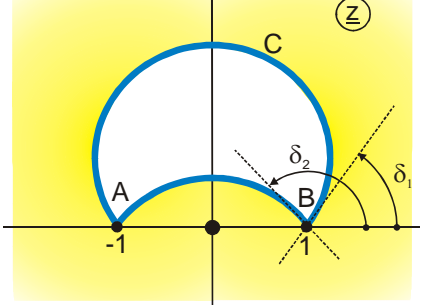
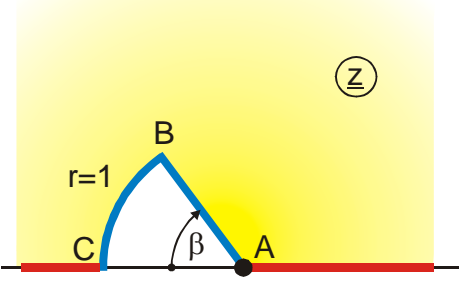
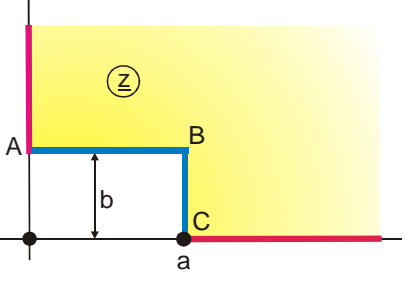
<p>A 3.5</p>	<p>A 3.6</p>	<p>A 3.7</p> <p>Kreisbogen, Radius 1</p>
<p>A 3.8</p>	<p>A 4</p> <p>Kreisbogen, Radius 1</p>	<p>A 4.1</p> <p>Kreisbögen, Radius r</p>
<p>A 5</p>	<p>A 5.1</p>	<p>A 5.2</p>
<p>A 5.3</p>	<p>A 5.4</p>	<p>A 5.5</p>
<p>A 5.6</p>	<p>A 5.7</p>	<p>A 6</p>
<p>A 6.1</p>	<p>A 6.2</p>	<p>A 6.3</p>

A 7	A 7.1	A 8
A 8.1	A 8.2	A 9
A 9.1	A 9.2	A 9.3
A 9.4	A 10	A 10.1
A 10.2	A 10.3	A 10.4

<p>A 10.5</p>	<p>A 10.6</p>	<p>A 10.7</p>
<p>A 10.8</p>	<p>A 10.9</p>	<p>A 11</p>
<p>A 11.1</p>	<p>A 11.2</p>	<p>A 11.3</p>
<p>A 3.10</p>	<p>A 2.4</p>	<p>A 8.3</p>
<p>A 3.9</p>	<p>A 3.11</p>	<p>A 3.12</p>

A 9.5	A 10.10	
		

Gruppe B: Eine leitende Elektrode endlicher Ausdehnung

B 1	B 1.1	B 1.2
		
B 1.3	B 2	B 2.1
		
B 2.2	B 3	B 3.1
		
B 3.2	B 3.3	B 4
		

B 4.1	B 5	B 5.1
B 5.2	B 5.3	B 5.4
B3.4	B 3_5	B 1.4
B 3.6		

Gruppe C: Zwei unendlich ausgedehnte Elektroden, symmetrisch angeordnet, entgegengesetzt gleich große Ladung

C 1	C 1.1
C 1.2	C1.3
C 1.4	C 2

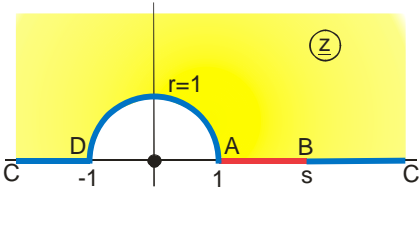
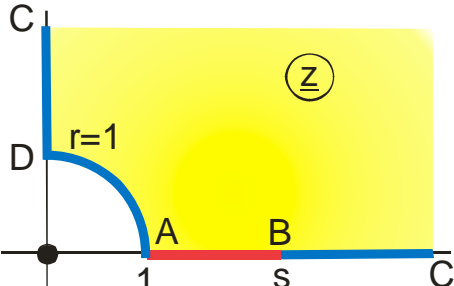
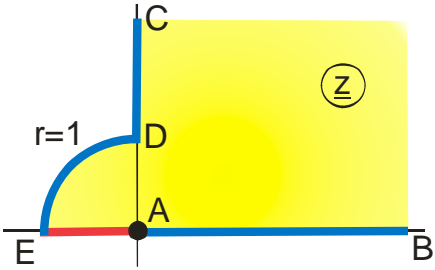
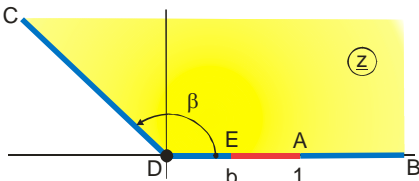
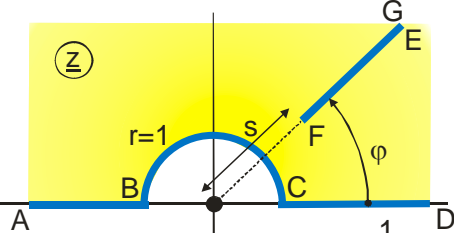
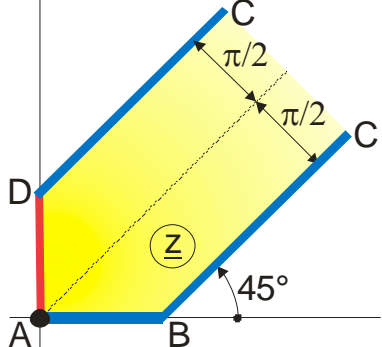
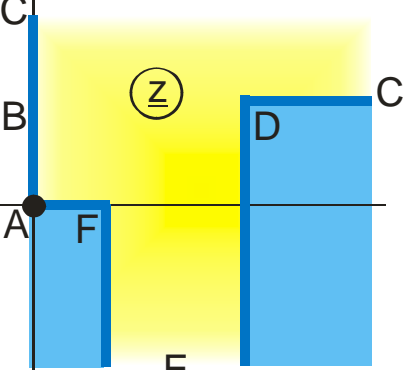
C 2.1	C 3
C 3.1	C 3.2
C 3.3	C 3.4
C 4	C 5

C 5.1	C 5.2
C 6	C 7
C 8	C 8.1
C 8.1	C 9

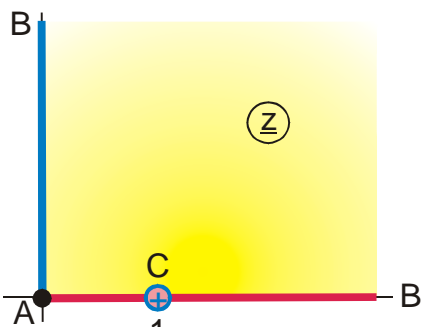
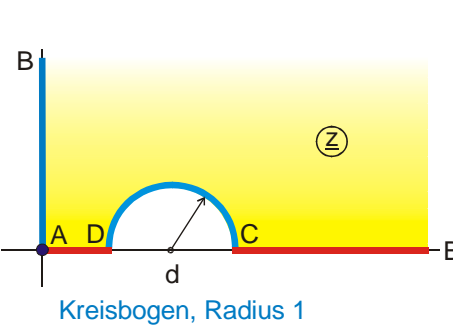
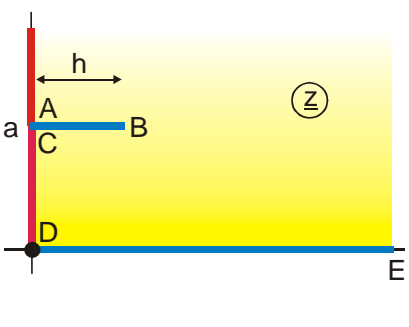
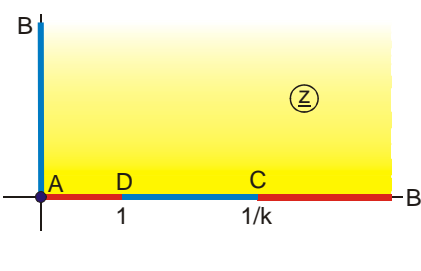
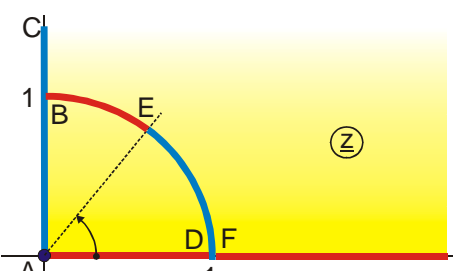
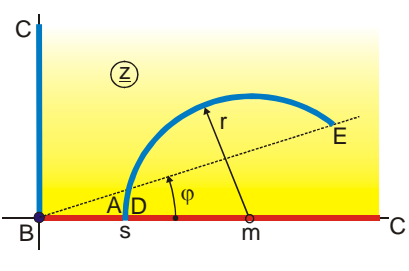
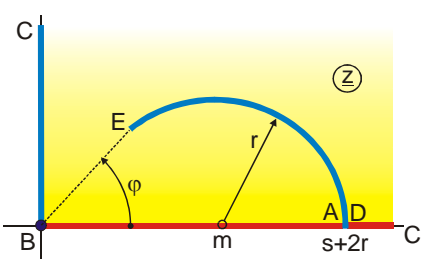
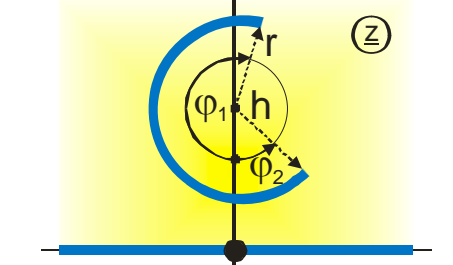
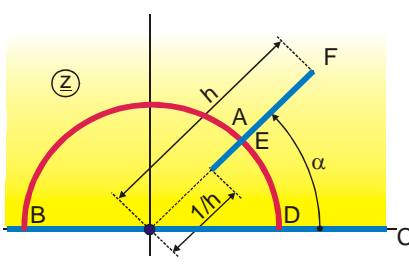
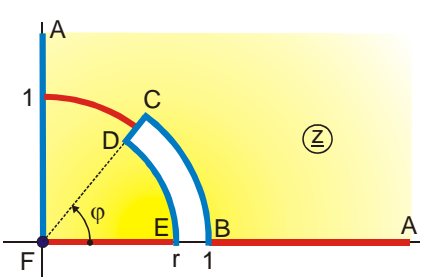
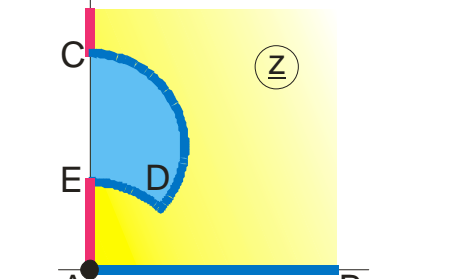
Gruppe D: Zwei unendlich ausgedehnte Elektroden, entgegengesetzt gleich große Ladung

D 1	D 1.1	D 1.2
D 1.3	D 1.4	D 1.5
D 2	D 2.1	D 2.2
D 2.2	D 2.3	D 2.4

<p>D 2.5</p>	<p>D 2.6</p>	<p>D 3</p>
<p>D 3.1</p>	<p>D 4</p>	<p>D 4.1</p>
<p>D 4.2</p>	<p>D 5</p>	<p>D 6</p>
<p>D 6.1</p>	<p>D 6.2</p>	<p>D 6.3</p>

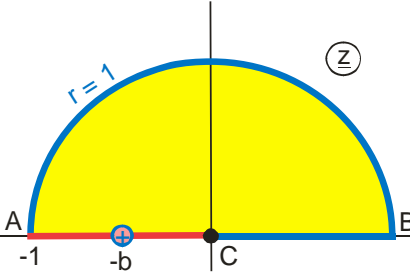
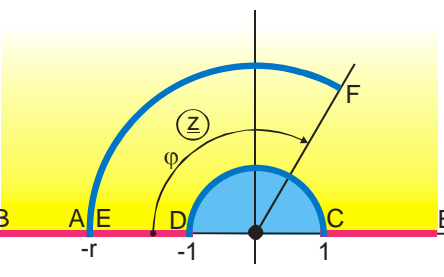
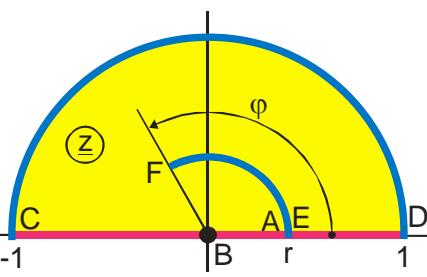
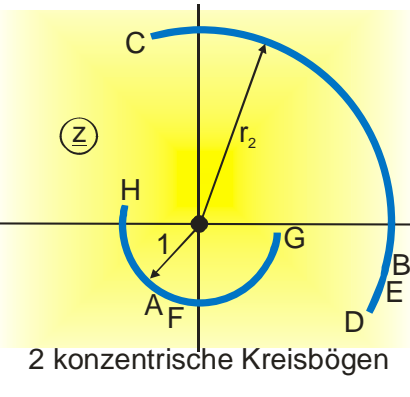
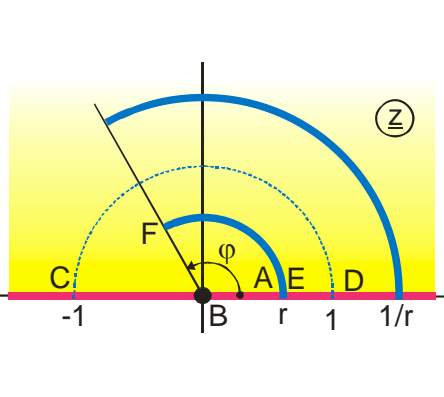
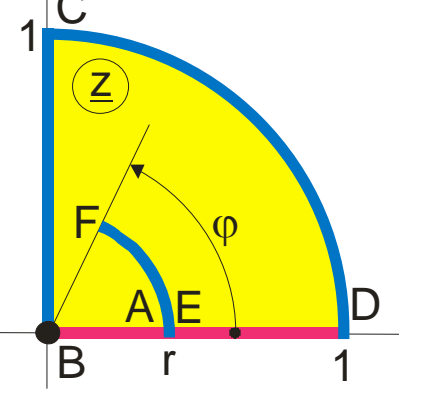
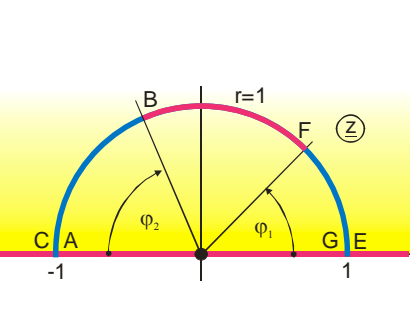
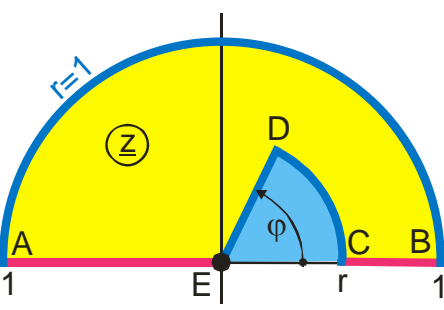
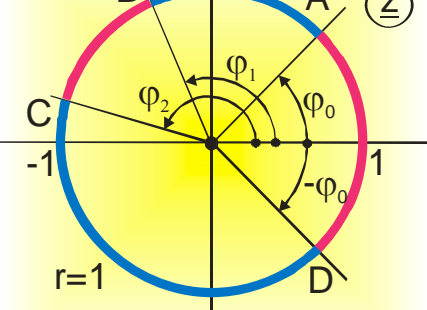
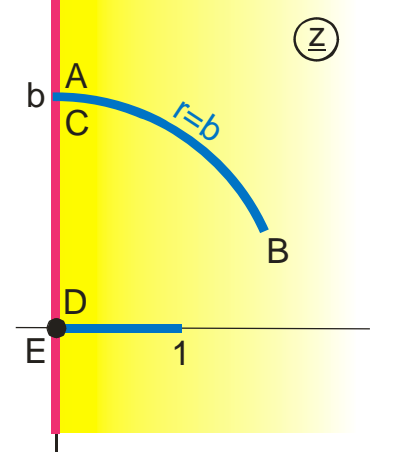
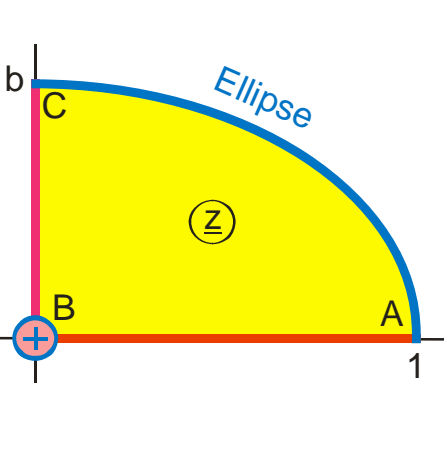
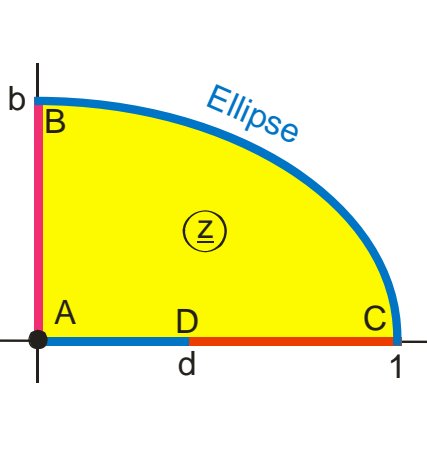
D 7	D 7.1	D 7.2
		
D 7.3	D 7.4	D 4.3
		
P 6.4		
		

Gruppe E: Zwei leitende Elektroden endlicher Ausdehnung, symmetrisch angeordnet, entgegengesetzt gleich große Ladung

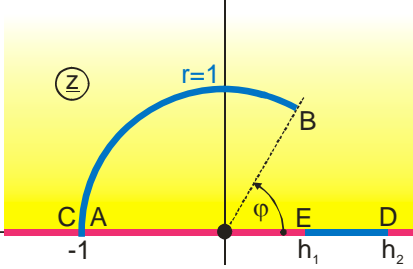
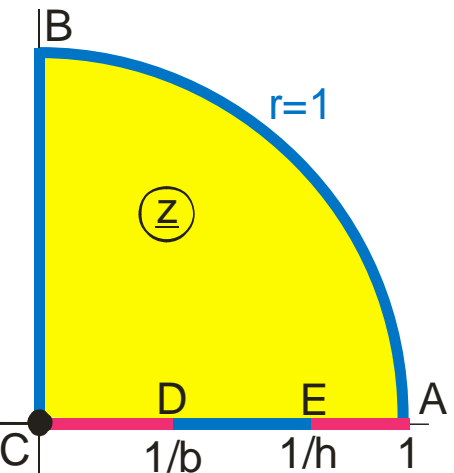
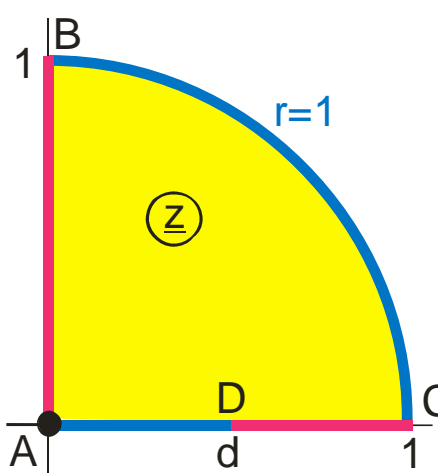
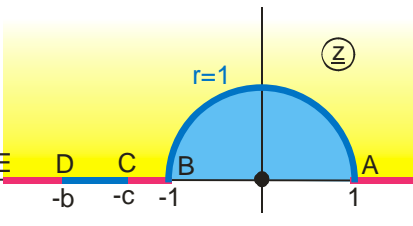
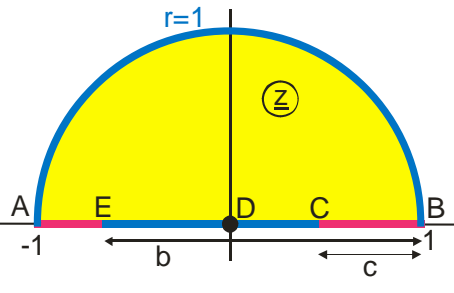
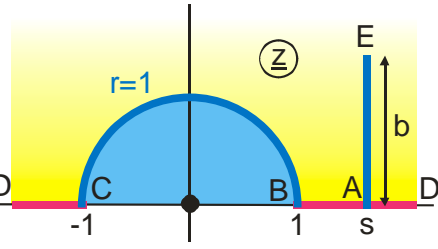
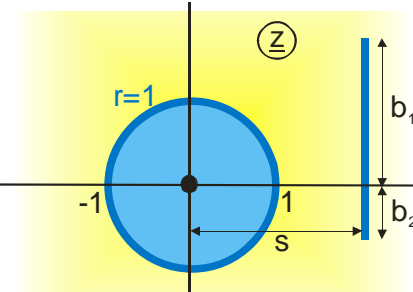
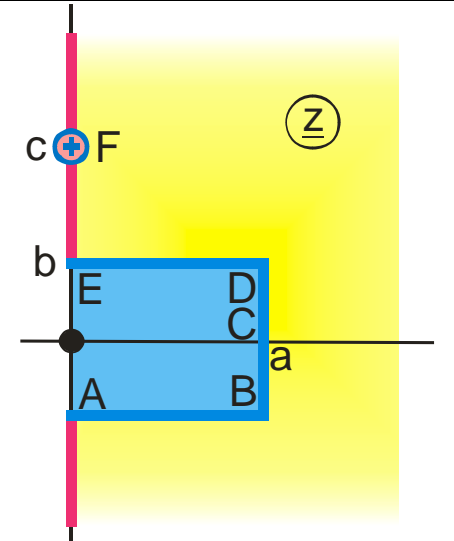
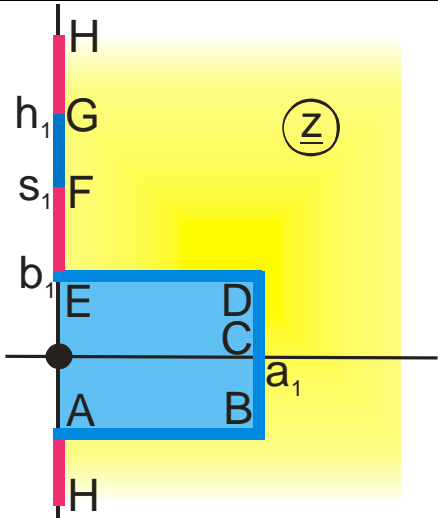
E 1	E 1.1	E 2
	 <p>Kreisbogen, Radius 1</p>	
E 3	E 4	E 4.1
		
E 4.2	E 4.3	E 5
		
E 6	E 6.1	
		

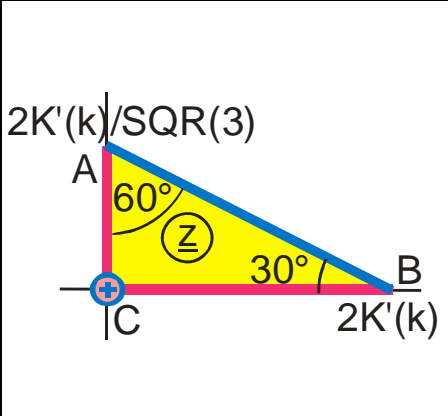
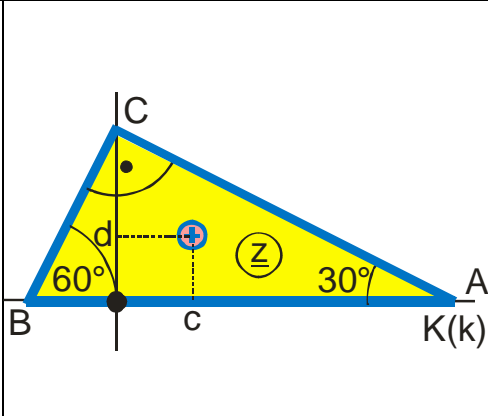
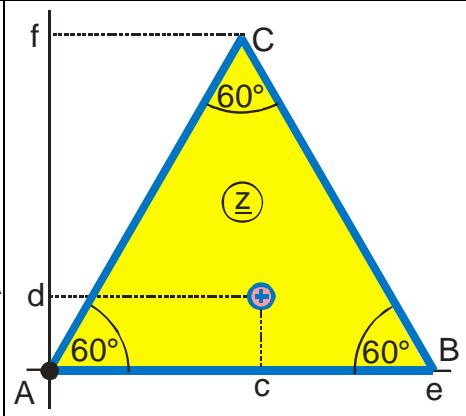
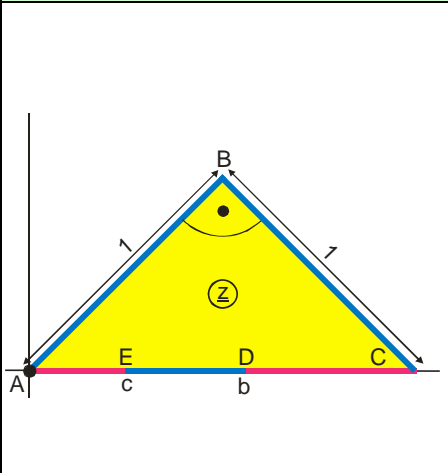
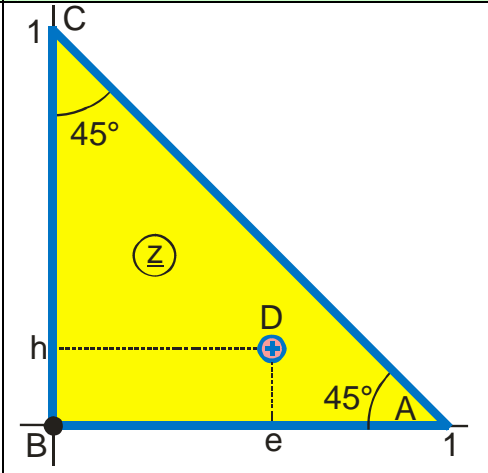
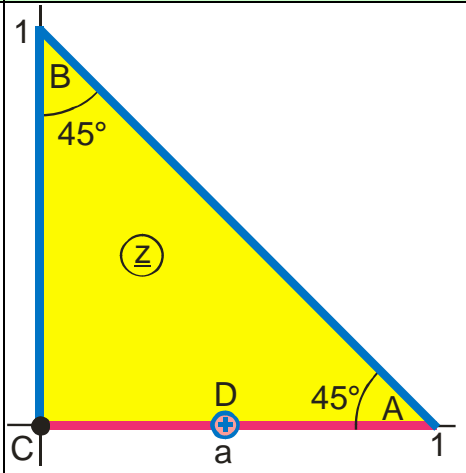
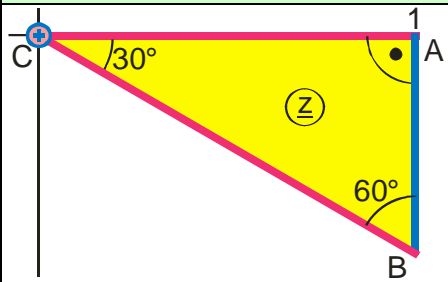
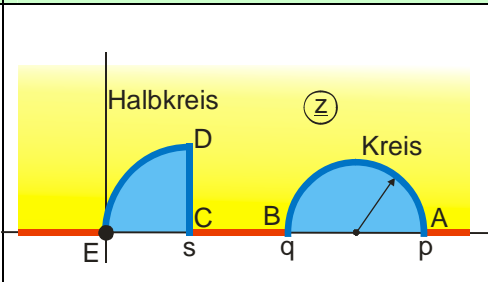
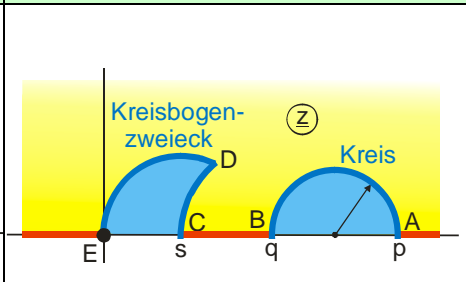
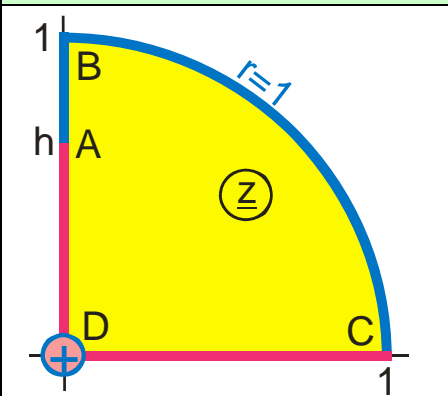
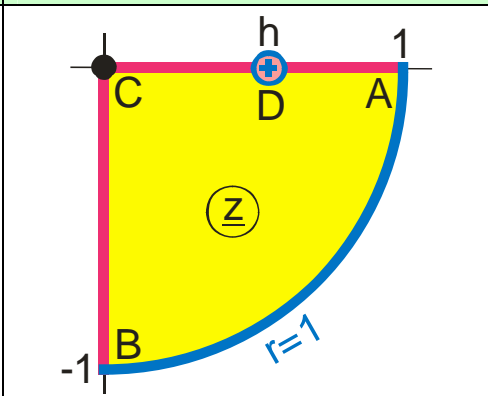
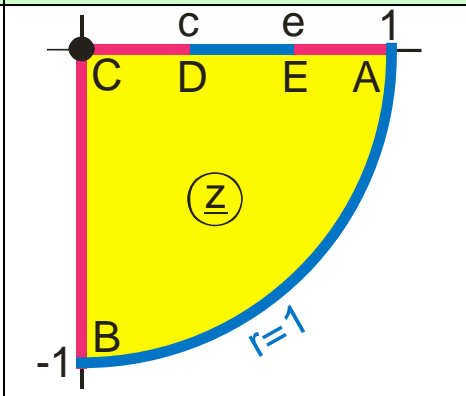
Gruppe F: Zwei leitende Elektroden endlicher Ausdehnung, entgegengesetzt gleich große Ladung

<p>F 1</p>	<p>F 1.1</p>	<p>F 1.2</p>
<p>F 1.3</p>	<p>F 2</p>	<p>F 2.1</p>
<p>F 2.2</p>	<p>F 2.3</p>	<p>F 2.4</p>
<p>F 2.5</p>	<p>F 2.6</p>	<p>F 2.7</p>

F 2.8	F 3	F 3.1
		
F 3.2	F 3.3	F 3.4
 <p>2 konzentrische Kreisbögen</p>		
F 3.5	F 3.6	F 3.7
		
F 3.8	F 4	F 4.1
		

F 4.2	F 4.3	F 4.4
F 5	F 5.1	F 5.2
F 5.3	F 5.4	F 5.5

F 6	F 6.1	F 6.2
		
F 6.3	F 6.4	F 6.5
		
F 6.6	F 7	F 7.1
		

F 8	F 8.1	F 8.2
		
F 8.3	F 8.4	F 8.5
		
F 8.6	F 9	F 9.1
		
F 2.9	F 2.10	F 6.7
		

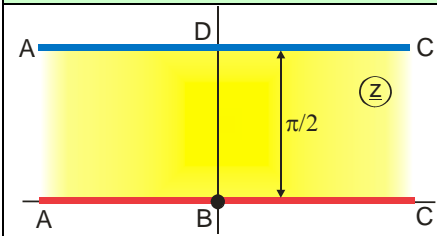
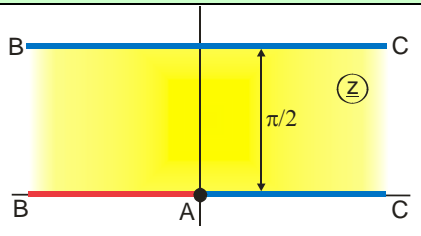
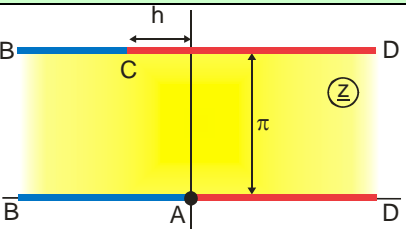
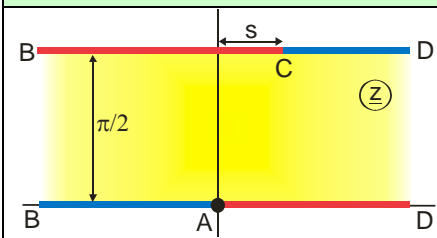
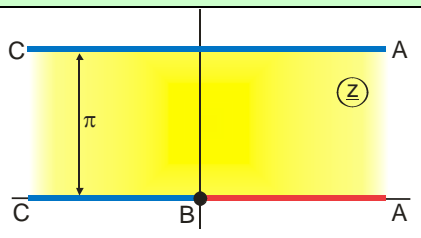
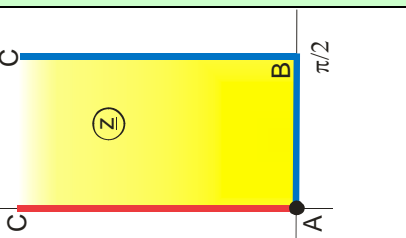
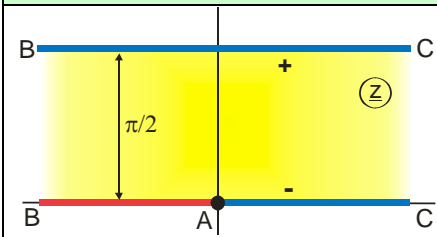
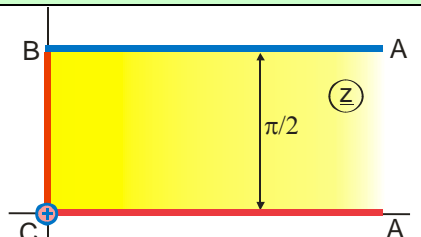
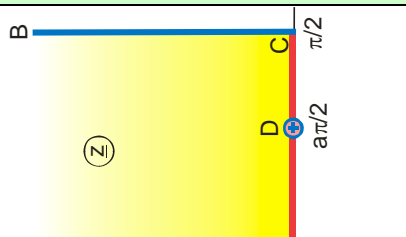
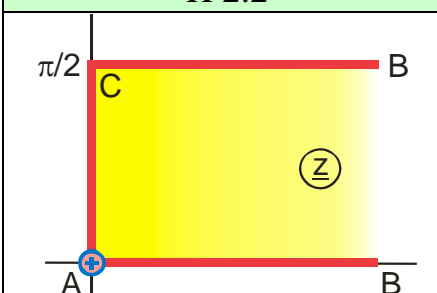
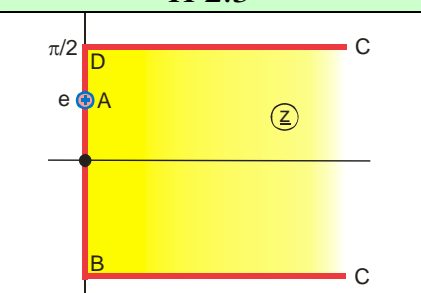
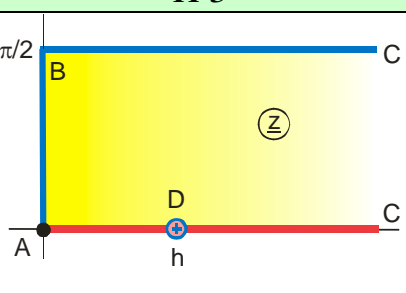
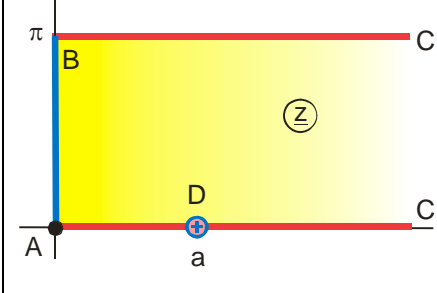
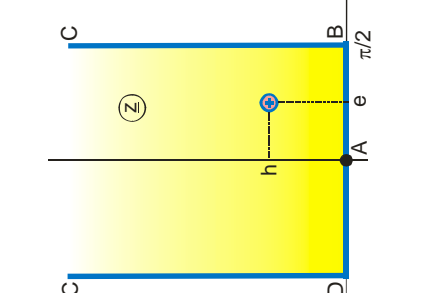
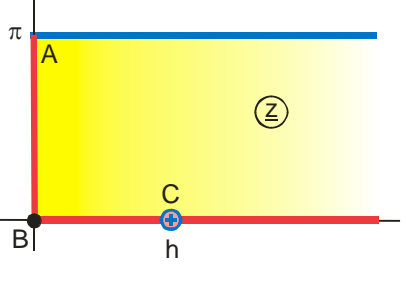
<p>F 4.5</p>	<p>F 4.6</p>	<p>F 3.9</p>
<p>F 3.10</p>	<p>F 2.11</p>	<p>F 8.7</p>
<p>F 8.8</p>	<p>F 1.4</p>	<p>F 2.12</p>
<p>F 3.11</p>		

Gruppe G: Radialsymmetrische Feldbilder

G 1	G 1.1	G 1.2
G 1.3	G 1.4	G 1.5
G 2	G 2.1	G 3
G 3.1	G 4	G 5

G 6	G 6.1	G 7
G 7.1	G 7.2	G 7.3
G 3.2	G 1.6	

Gruppe H: Einfach periodische Feldbilder

H 1	H 1.1	H 1.2
		
H 1.3	H 1.4	H 1.5
		
H 1.6	H 2	H 2.1
		
H 2.2	H 2.3	H 3
		
H 3.1	H 3.2	H 3.3
		

<p>H 3.4</p>	<p>H 3.5</p>	<p>H 4</p>
<p>H 4.1</p>	<p>H 4.2</p>	<p>H 4.3</p>
<p>H 4.4</p>	<p>H 5</p>	<p>H 6</p>
<p>H 6.1</p>	<p>H 6.2</p>	<p>H 6.3</p>
<p>H 6.4</p>	<p>H 6.5</p>	<p>H 6.6</p>
<p>H 6.7</p>	<p>H 6.8</p>	<p>H 6.9</p>

<p>H 6.10</p>	<p>H 6.11</p>	<p>H 6.12</p>
<p>H 6.13</p>	<p>H 6.14</p>	<p>H 7</p>
<p>H 7.1</p>	<p>H 7.2</p>	<p>H 7.3</p>
<p>H 7.4</p>	<p>H 7.5</p>	<p>H 7.6</p>
<p>H 7.7</p>	<p>H 7.8</p>	<p>H 7.9</p>
<p>H 7.10</p>	<p>H 7.11</p>	<p>H 7.12</p>

<p>H 7.13</p>	<p>H 7.14</p>	<p>H 7.15</p>
<p>H 7.16</p>	<p>H 7.17</p>	<p>H 7.18</p>
<p>H 7.19</p>	<p>H 8</p>	<p>H 8.1</p>
<p>H 8.2</p>	<p>H 8.3</p>	<p>H 9</p>
<p>H 9.1</p>	<p>H 9.2</p>	<p>H 10</p>
<p>H 10.1</p>	<p>H 10.2</p>	<p>H 10.3</p>

<p>H 11</p>	<p>H 11.1</p>	<p>H 12</p>
<p>H 12.1</p>	<p>H 12.2</p>	<p>H 12.3</p>
<p>H 3.6</p>	<p>H 12.4</p>	

Gruppe I: Doppelt periodische Feldbilder

I 1	I 1.1	I 1.2
I 1.3	I 1.4	I 1.5
I 1.6	I 1.7	I 1.8
I 1.9	I 2	I 2.1

I 2.2	I 2.3	I 2.4
I 2.5	I 2.6	I 2.7
I 2.8	I 3	I 3.1
I 3.2	I 4	I 4.1

I 4.2	I 5	I 5.1
I 6	I 2.9	

Gruppe J: Einfach periodische Oberflächen

J 1	J 1.1	J 1.2
J 2	J 2.1	J 3
J 3.1	J 3.2	J 3.3

Gruppe K: Eine endlich und eine unendlich ausgedehnte Elektrode, entgegengesetzt gleich große Ladung

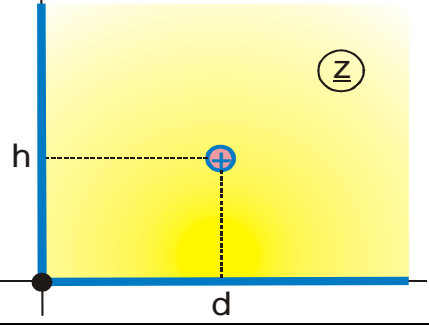
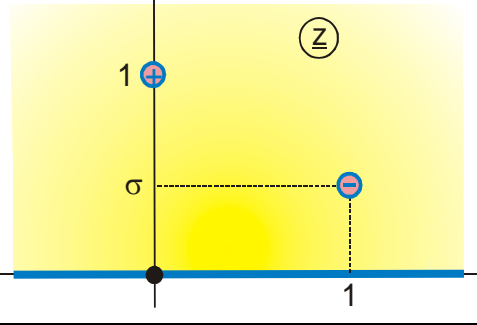
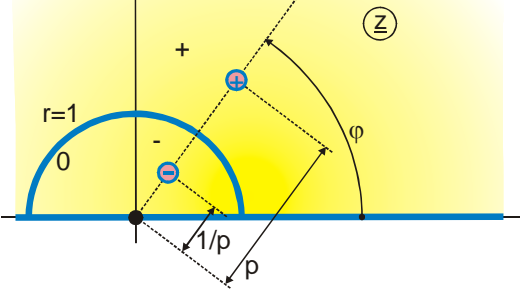
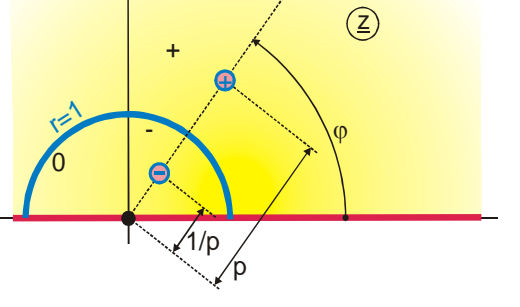
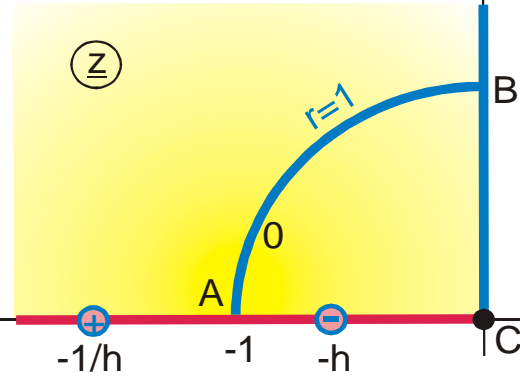
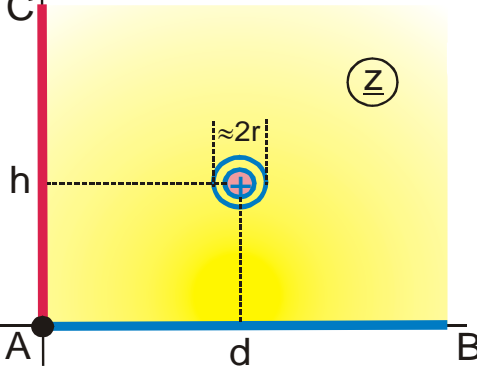
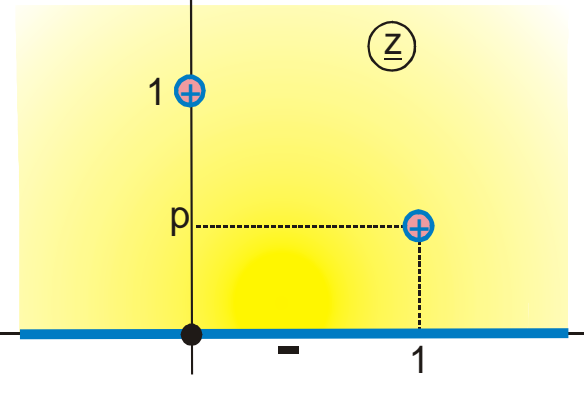
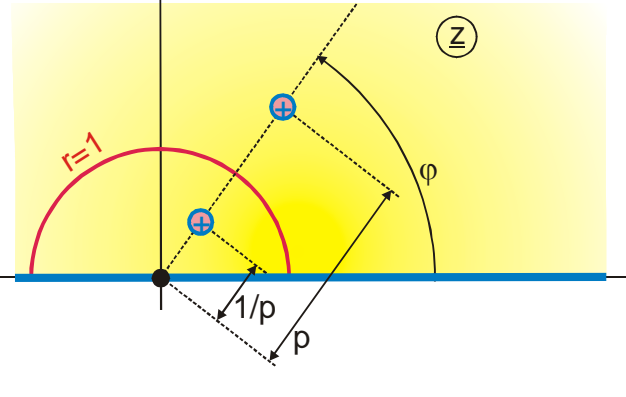
K 1	K 1.1	K 1.2
K 1.3	K 1.4	K 1.5
K 1.6	K 1.7	K 1.8
K 1.9	K 1.10	K 1.11

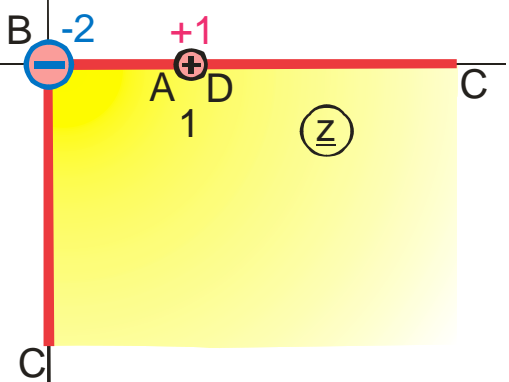
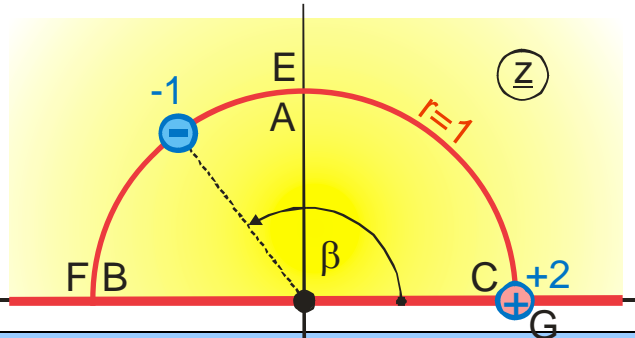
K 2	K 2.1	K 2.2
K 2.3	K 3	K 3.1
K 3.2	K 3.3	K 3.4
K 3.5	K 3.6	K 3.7

K 3.8	K 4	K 4.1
K 4.2	K 4.3	K 4.4
K 4.5	K 4.6	K 5

K 6	K 1.12	K 4.7
K 4.8	K 1.13	K 4.9
K 1.14	K 1.15	

Gruppe L: Weitere Abbildungen mit Linienladungen

L 1	L 1.1
	
L 1.2	L 1.3
	
L 1.4	L 2
	
L 2.1	L 2.2
	

L 3.3	L 3.4
	

Gruppe M: Abbildungen mit abgerundeten Ecken

M 1	M 1.1	M 1.2
M 2	M 2.1	M 2.2
M 2.3	M 3	M 4
M 4.1	M 5	M 5.1

Gruppe N: Leitende Elektroden mit konstanter Feldstärke

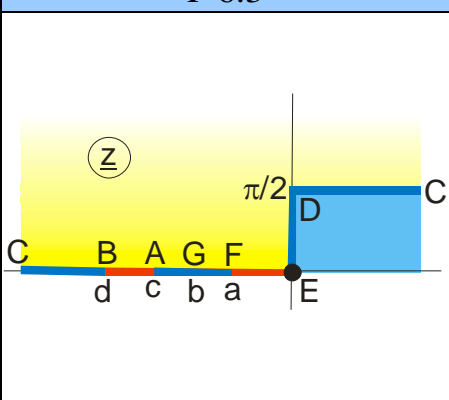
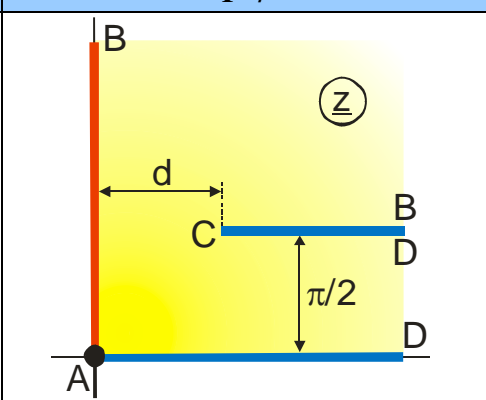
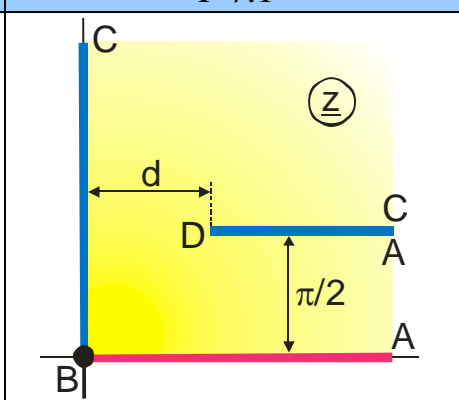
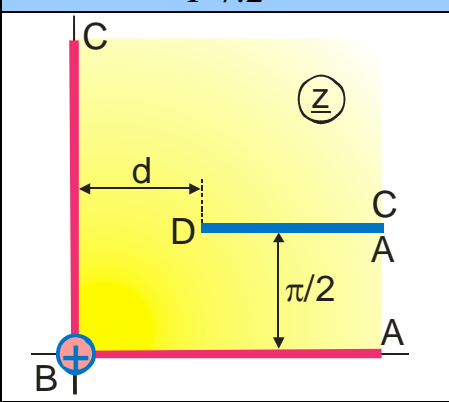
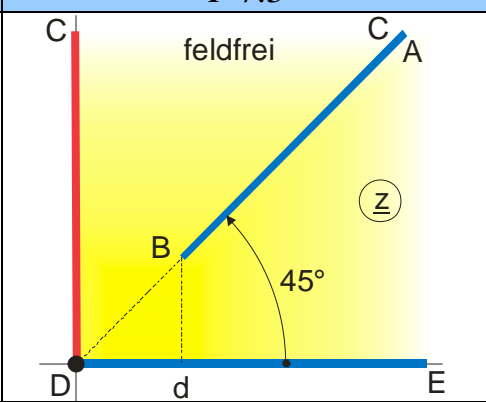
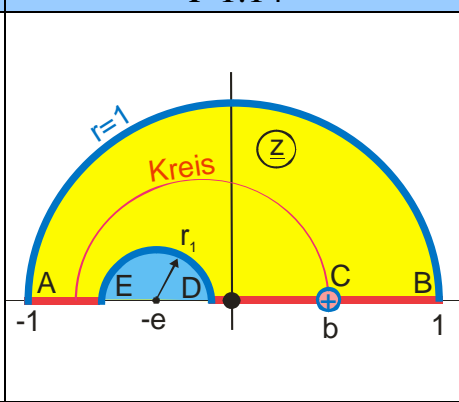
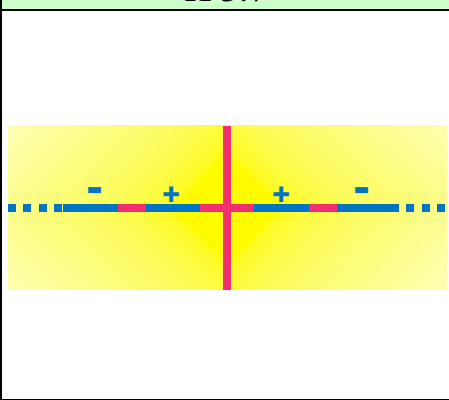
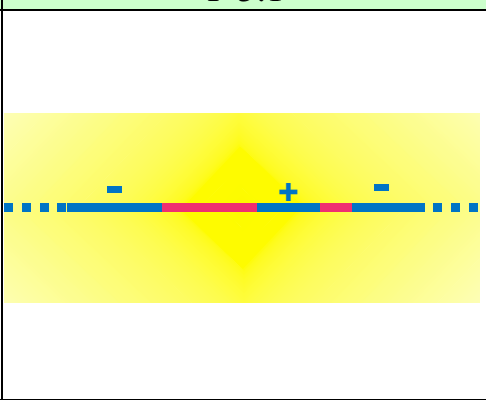
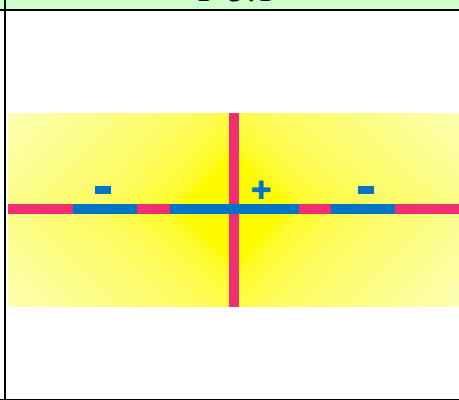
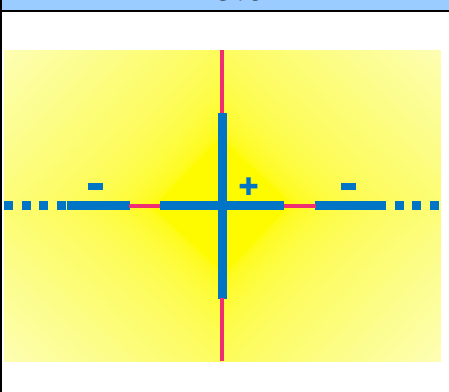
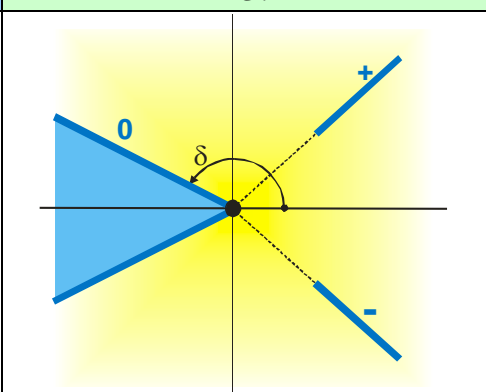
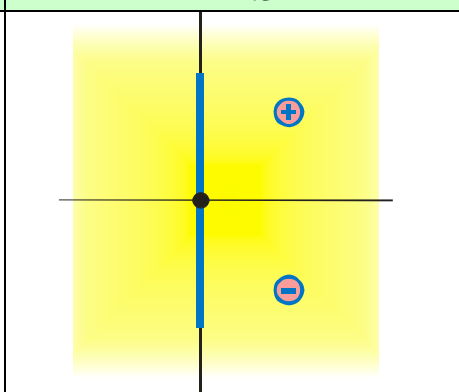
N 1	N 1.1	N 1.2
N 1.3	N 1.4	N 1.5
N 1.6	N 2	N 2.1
N 2.2	N 3	

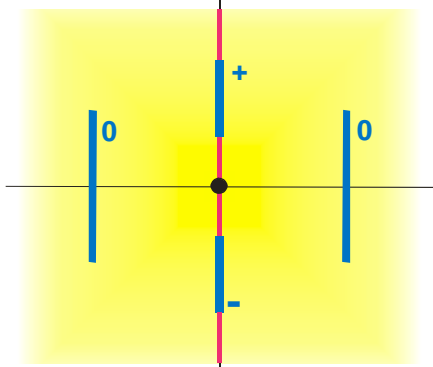
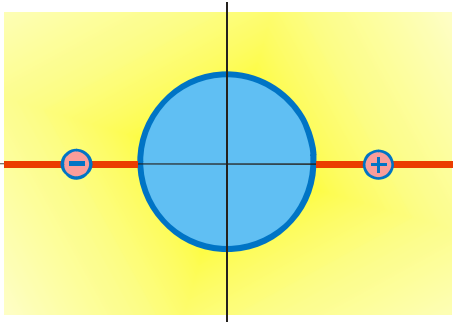
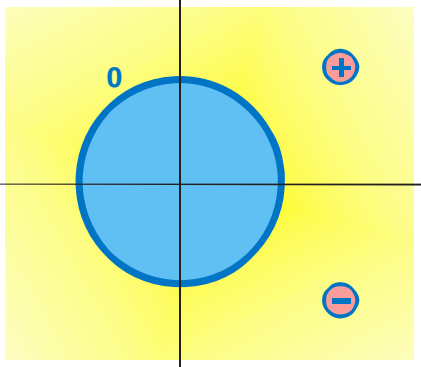
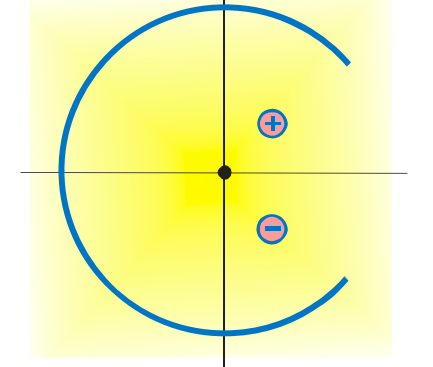
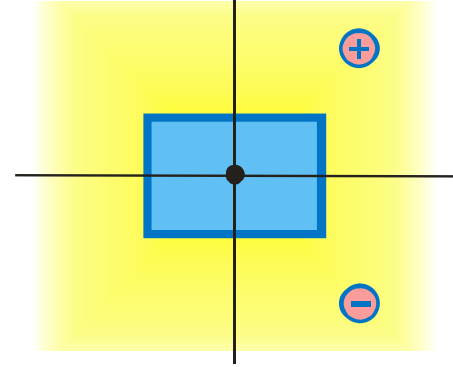
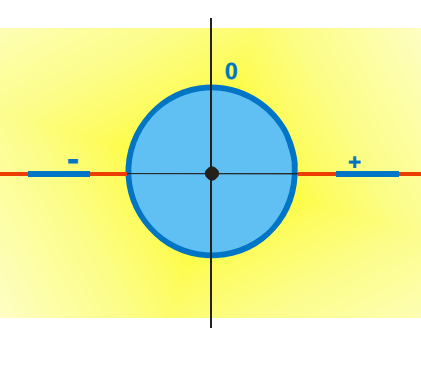
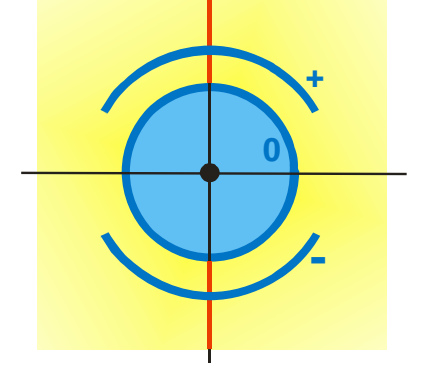
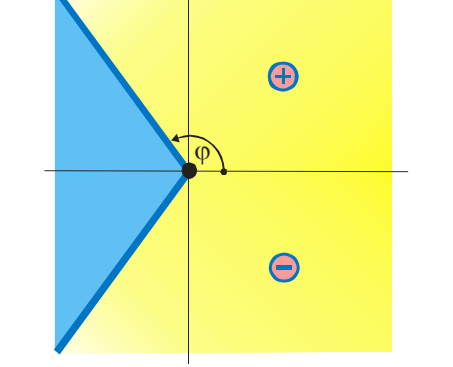
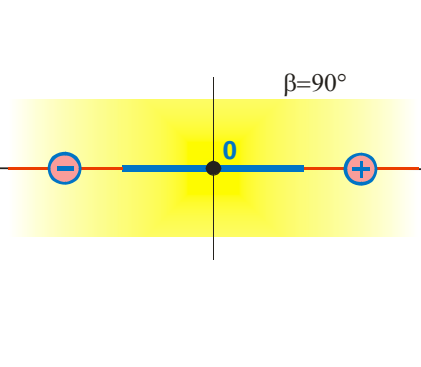
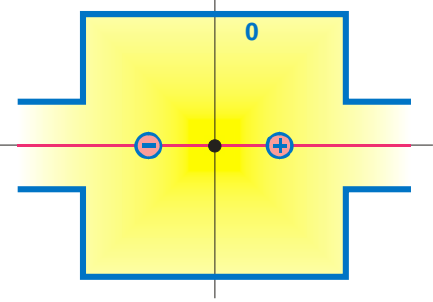
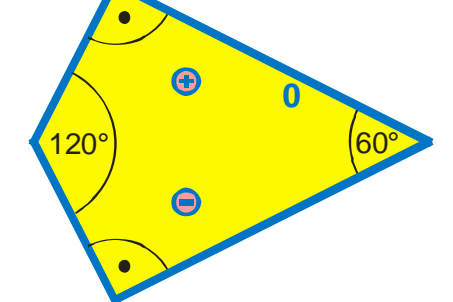
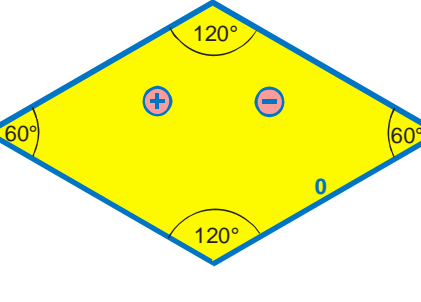
Gruppe P: Drei und mehr leitende Elektroden

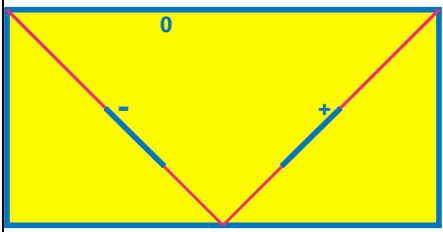
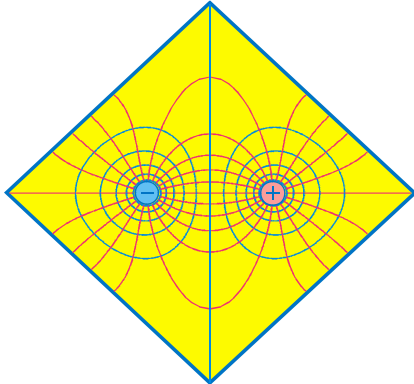
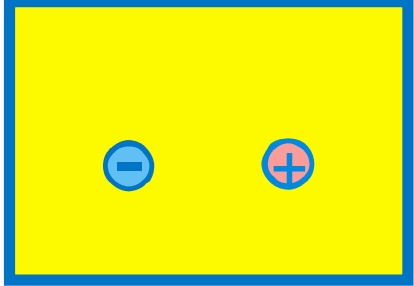
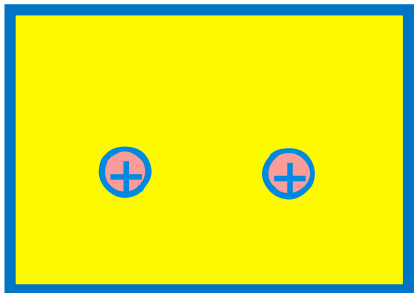
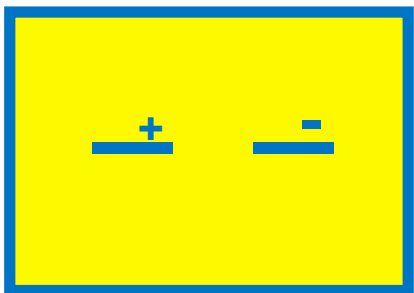
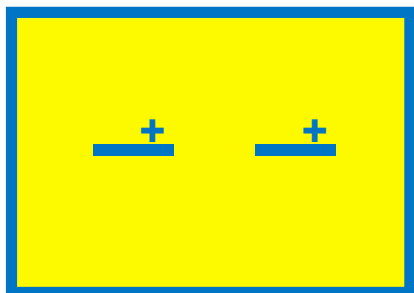
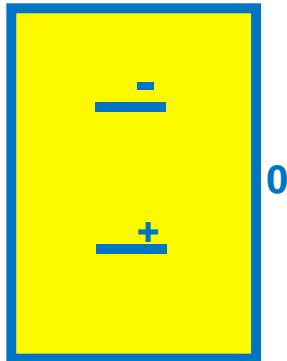
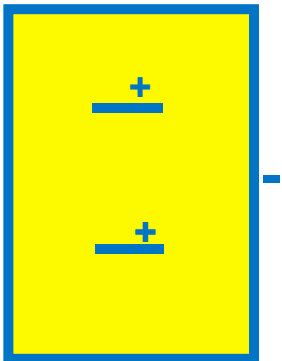
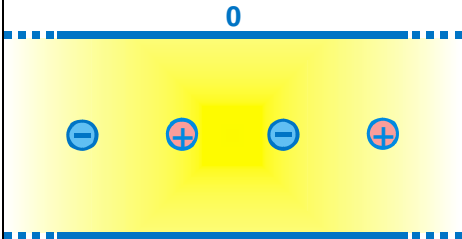
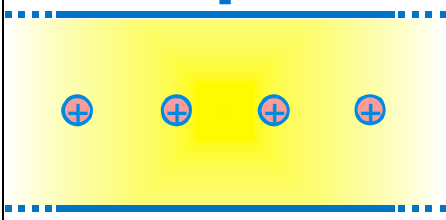
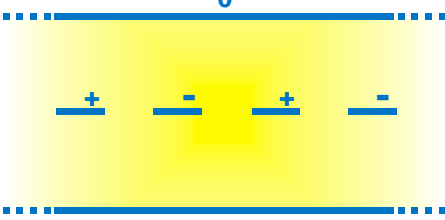
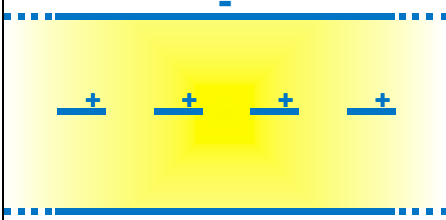
P 1	P 1.1	P 1.2
P 1.3	P 1.4	P 1.5
P 1.6	P 1.7	P 1.8
P 1.9	P 1.10	P 1.11

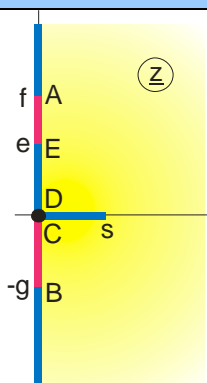
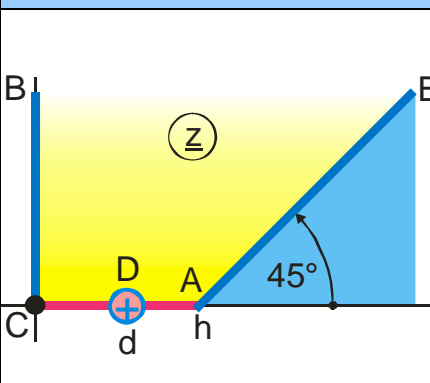
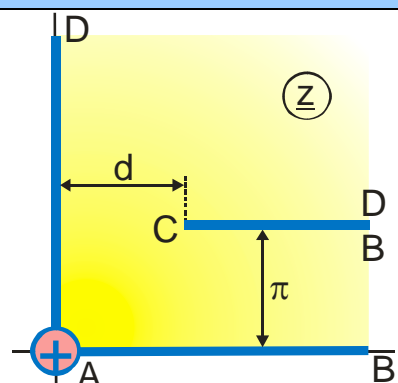
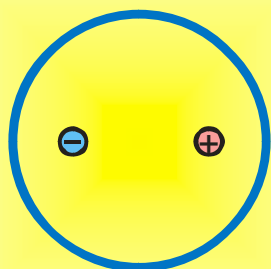
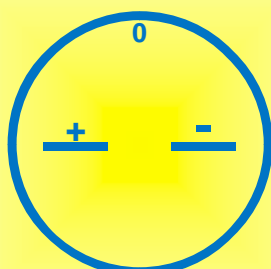
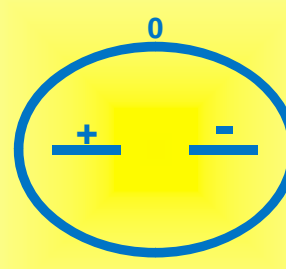
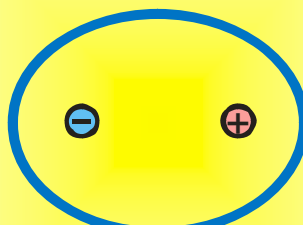
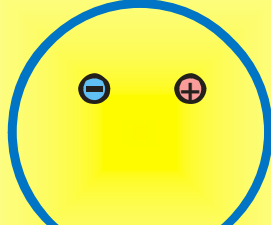

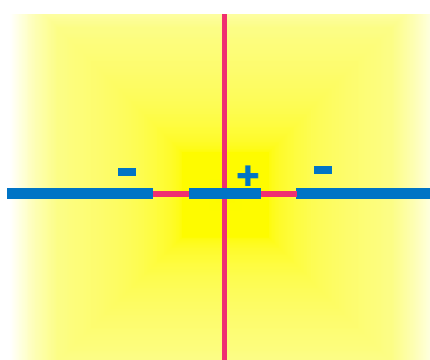
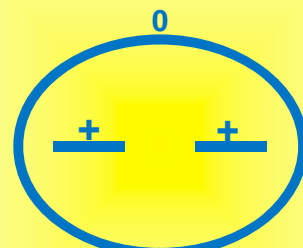
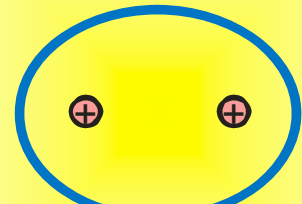
P 1.12	P 1.13	P 2
P 2.1	P 2.2	P 2.3
P 3	P 3.1	P 3.2
P 3.3	P 3.4	P 3.5

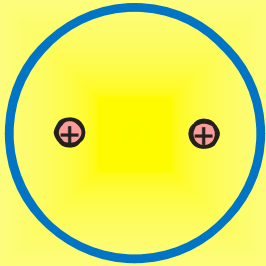
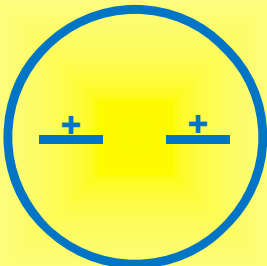
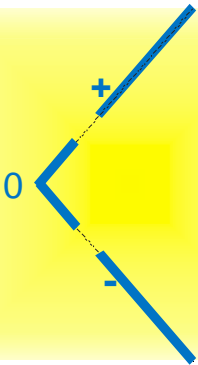

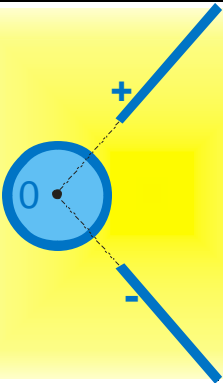
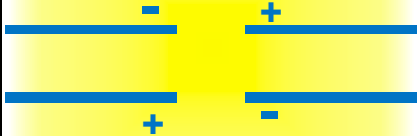

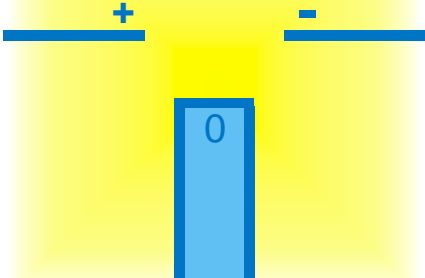
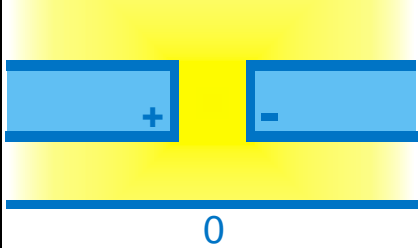
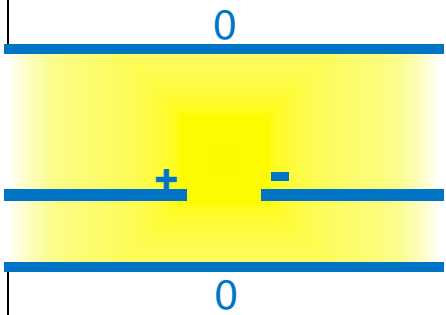
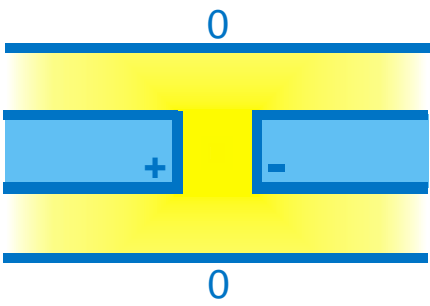
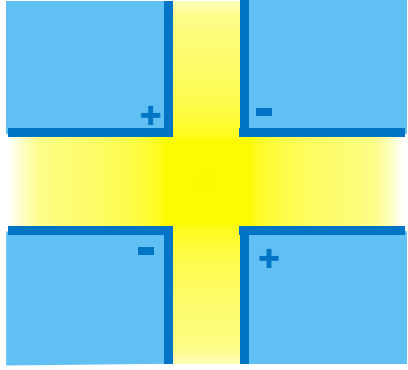
P 4.10	P 4.11	P 5
P 5.1	P 5.2	P 5.3
P 5.4	P 5.5	P 5.6
P 6	P 6.1	P 6.2

<p>P 6.3</p> 	<p>P 7</p> 	<p>P 7.1</p> 
<p>P 7.2</p> 	<p>P 7.3</p> 	<p>P 1.14</p> 
<p>K 3.7</p> 	<p>F 5.1</p> 	<p>P 5.1</p> 
<p>P 5.6</p> 	<p>K 3.2</p> 	<p>K 1.3</p> 

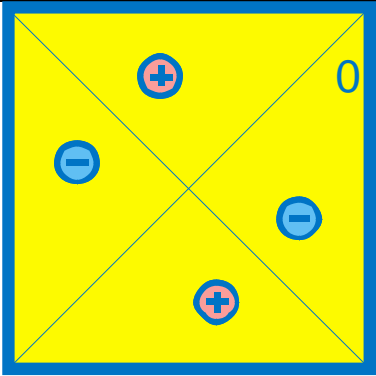
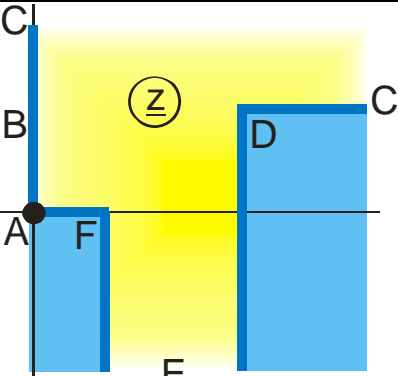
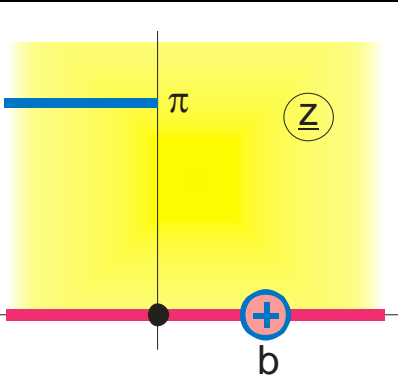
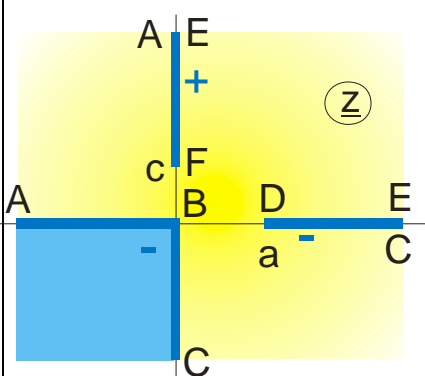
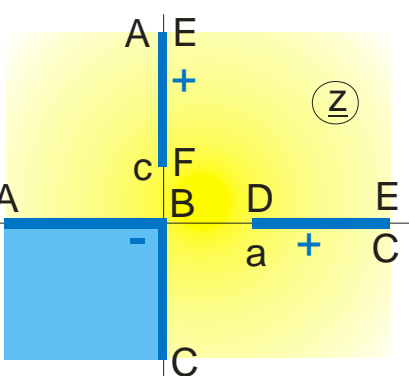
<p>K 3.8</p> 	<p>K 1.5</p> 	<p>K 1.6</p> 
<p>K 1.7</p> 	<p>K 2.1</p> 	<p>K 3.5</p> 
<p>K 4.5</p> 	<p>K 1.12</p> 	<p>K 1.4</p> 
<p>K 2.3</p> 	<p>F 8.1</p> 	<p>F 8.2</p> 

F 8.3	F 8.5	I 1.1
		
I 1.4	I 2.1	I 2.4
		
I 1.2	I 6	I 1
		
I 1.2	I 2.1	I 2.2
		

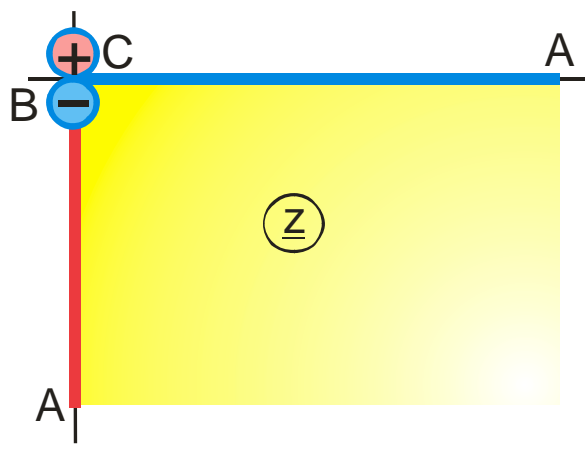
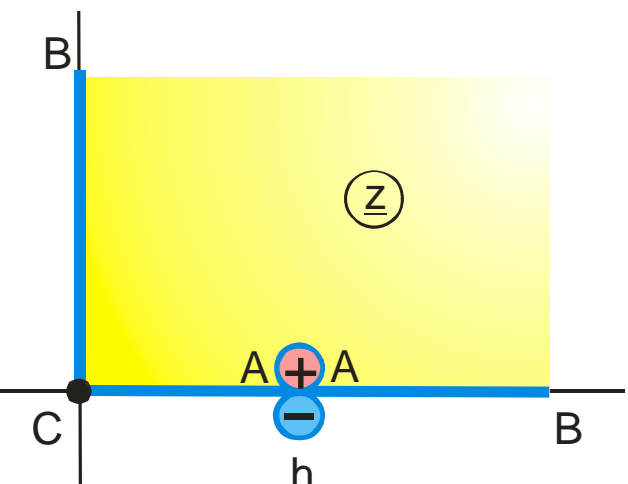
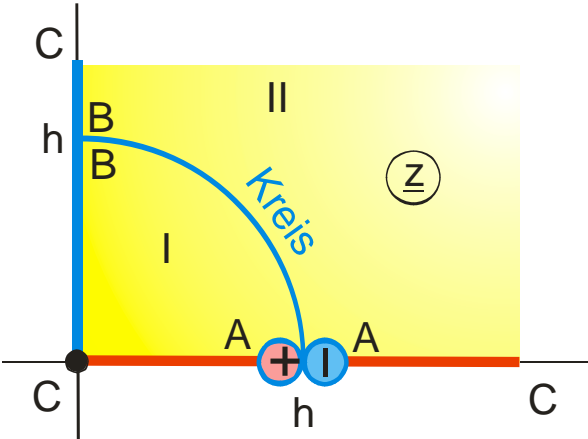
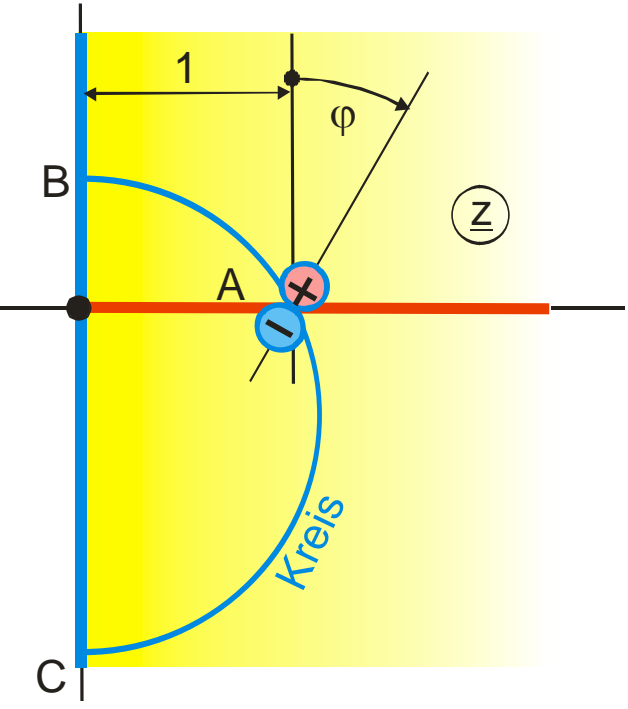
P 4.12	P 2.4	P 7.4
		
F 2.6	F 6.1	F 4.3
		
F 4.2	F 2.7	F 3.4
		
E 3	F 4.6	F 4.5
		

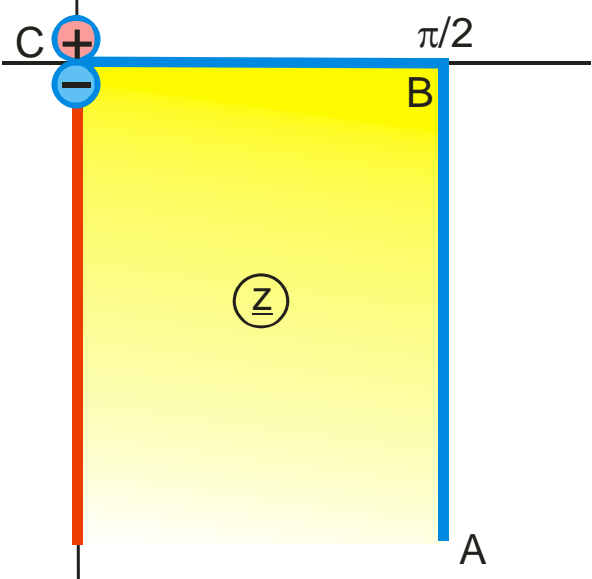
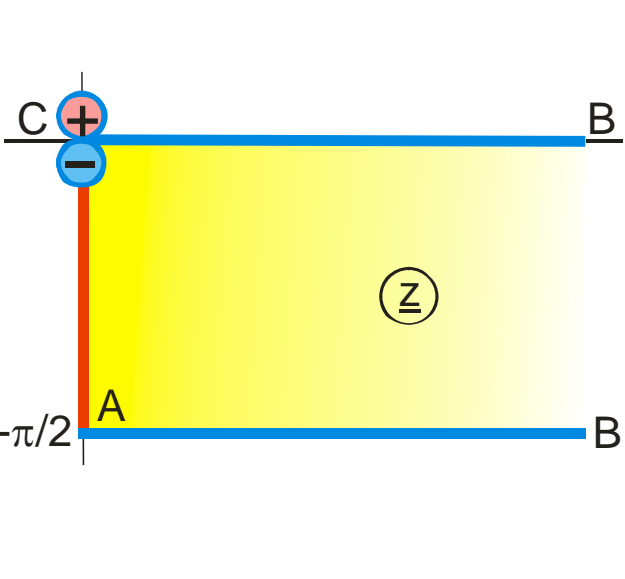
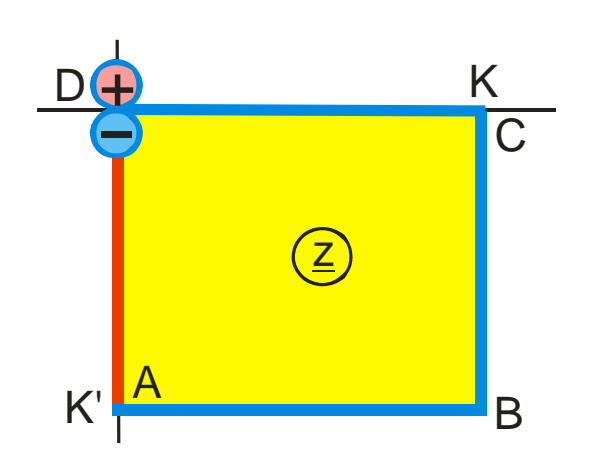
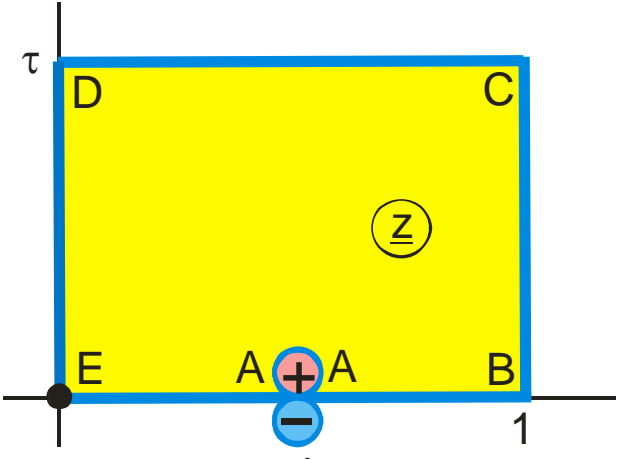
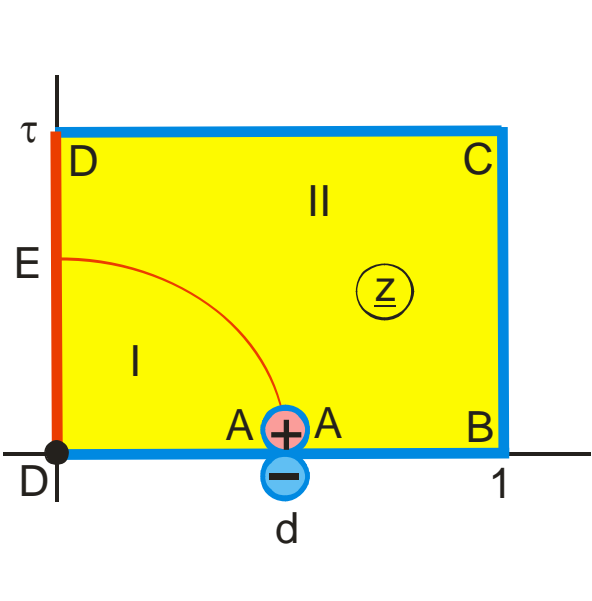
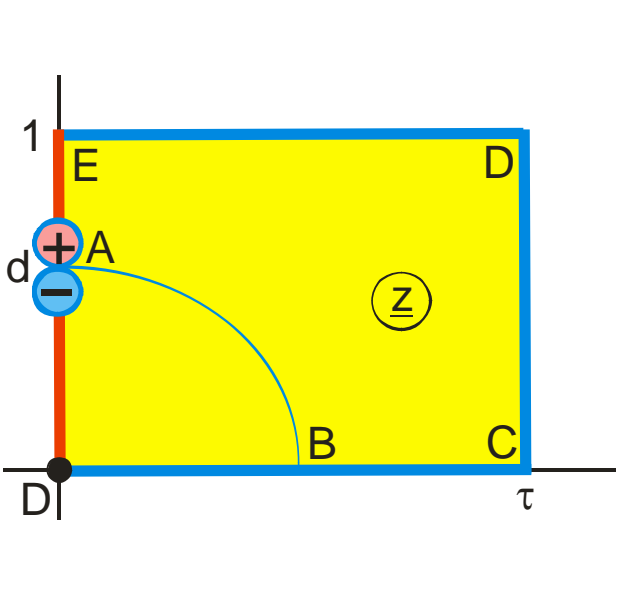
F 2.10	F 6.7	D 2.6
		
D 7.1	D 7.4	D 2
		
D 2.3	D 2.4	D 6.1
		
D 5	D 6	D 4
		

<p>D 4.1</p>	<p>D 4.3</p>	<p>P 4.13</p>
<p>P 4.14</p>	<p>P 2.5</p>	<p>P 4.15</p>
<p>P 3.8</p>	<p>P 3.9</p>	<p>P 3.10</p>
<p>P 1.15</p>	<p>F 8.5</p>	<p>F 8.7</p>

F 8.4	P 6.4	P 1.16
		
P 3.11	P 3.12	
		

Gruppe Q: Dipolfelder

Q 1	Q 2
	
Q 2.1	Q 2.2
	

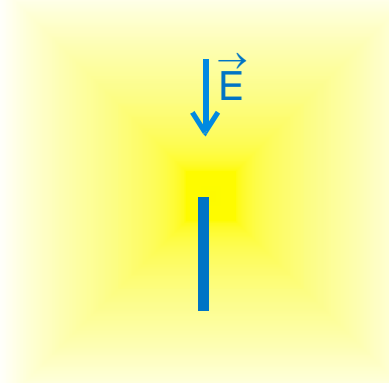
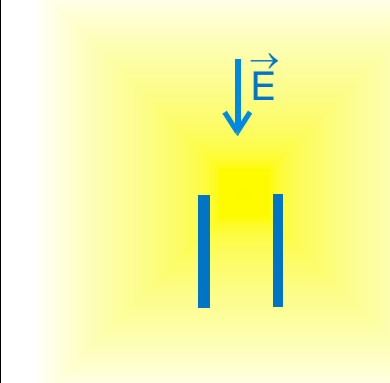
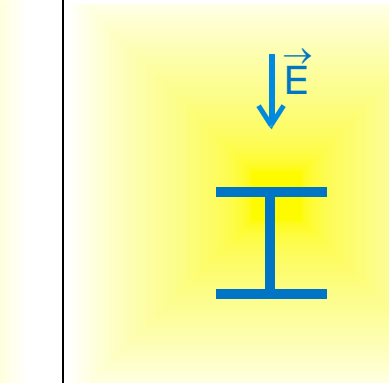
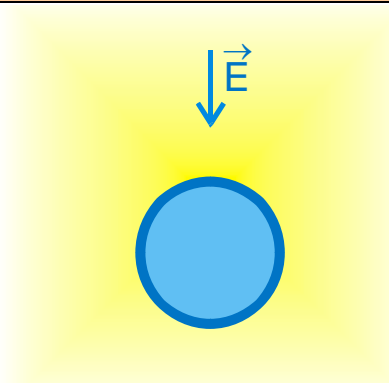
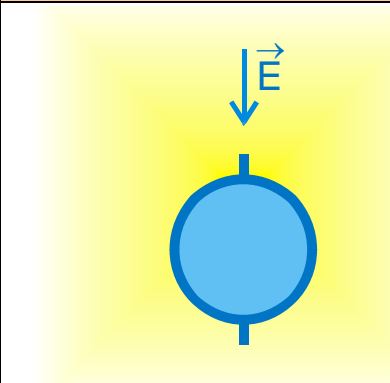
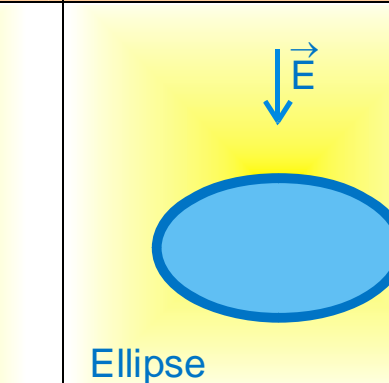
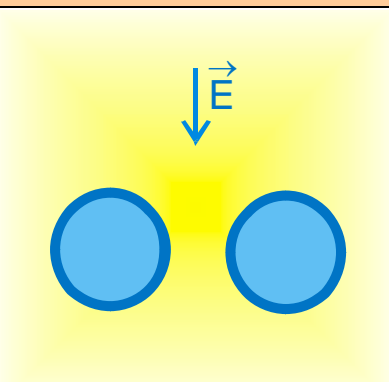
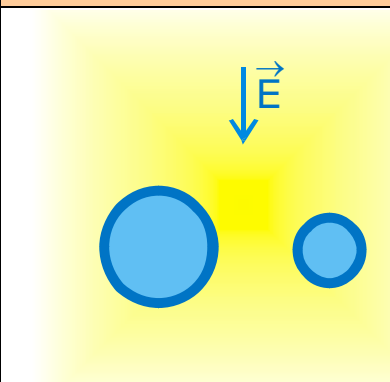
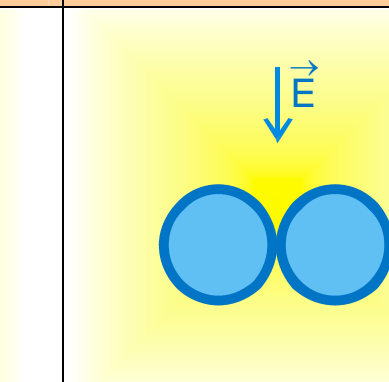
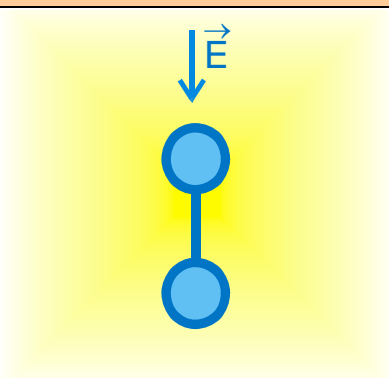
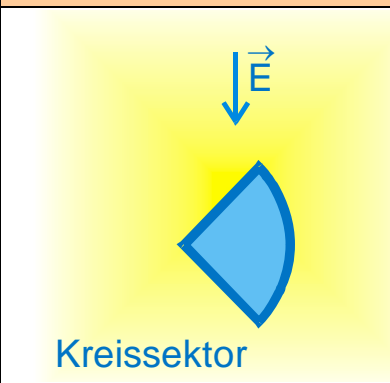
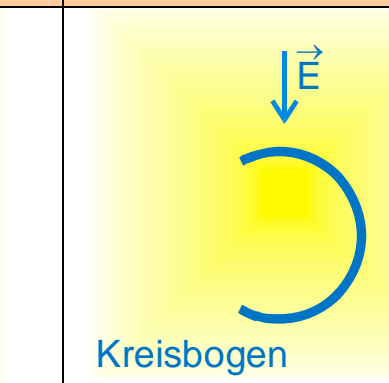
Q 3	Q 3.1
	
Q 4	Q 4.1
	
Q 4.2	Q 4.3
	

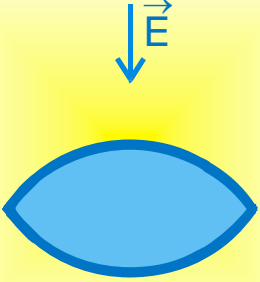

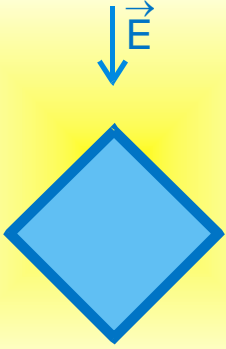
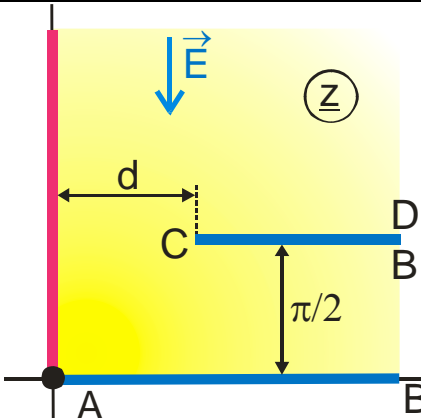


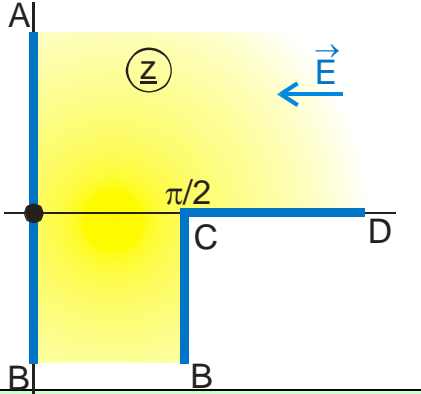
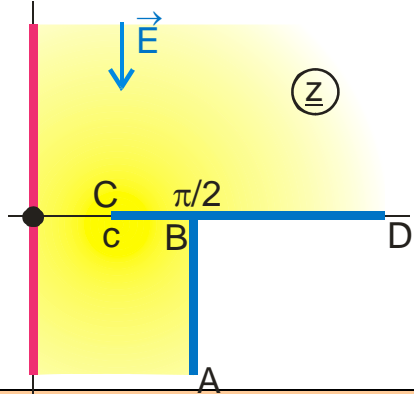
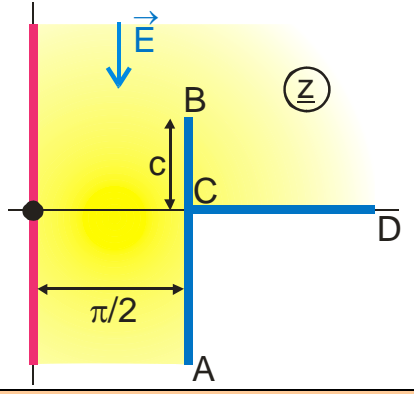
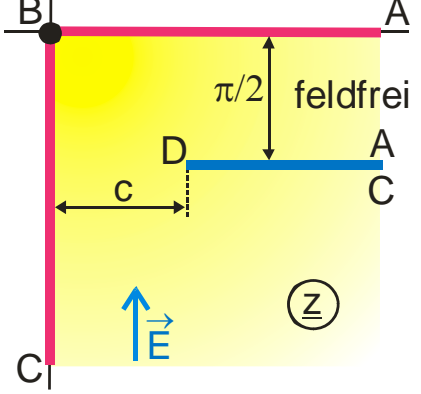
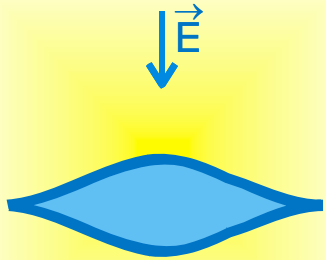
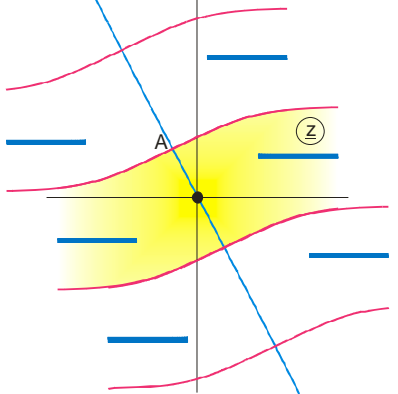
Q 4.4	Q 5
Q 5.1	Q 4.5

Gruppe R: Leitende Elektroden im homogenen Feld

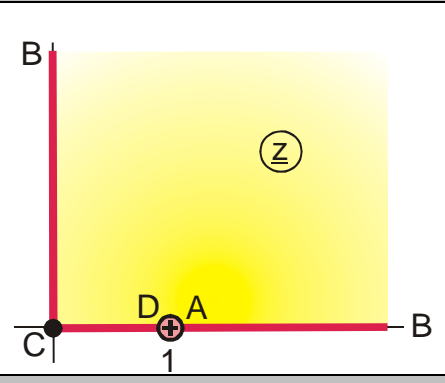
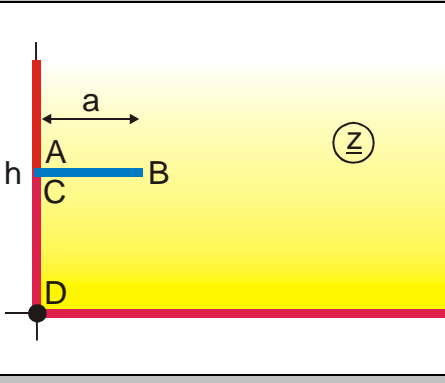
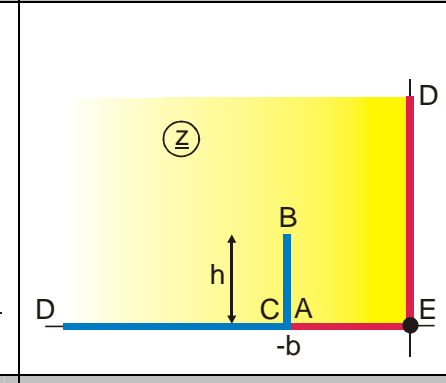
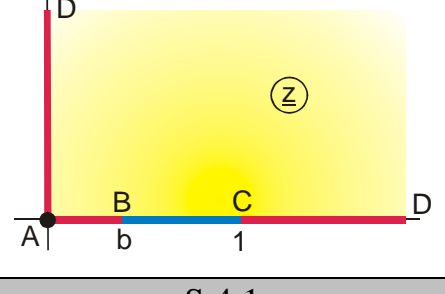
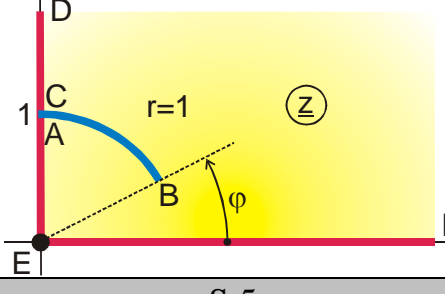
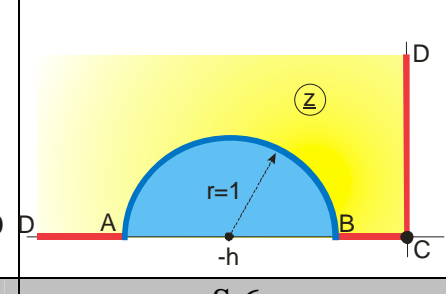
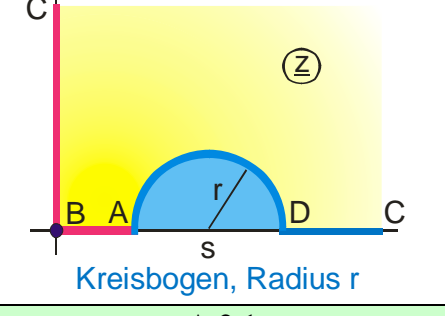
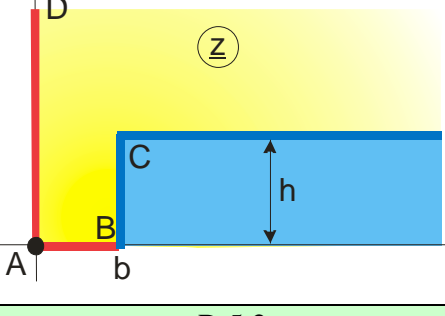
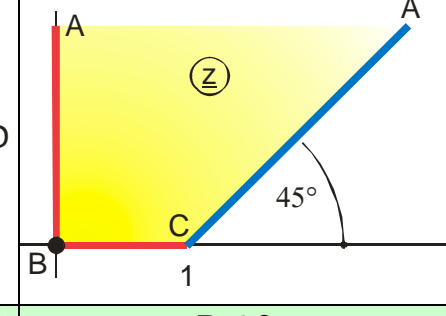
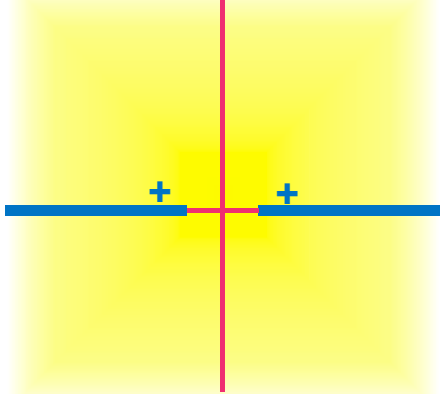
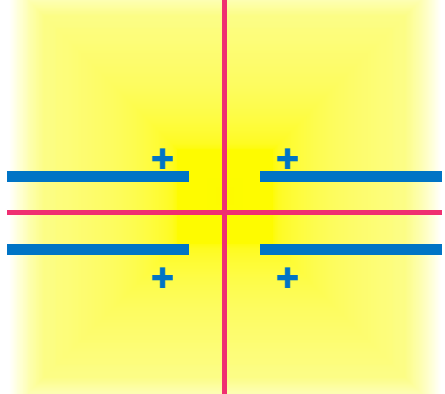
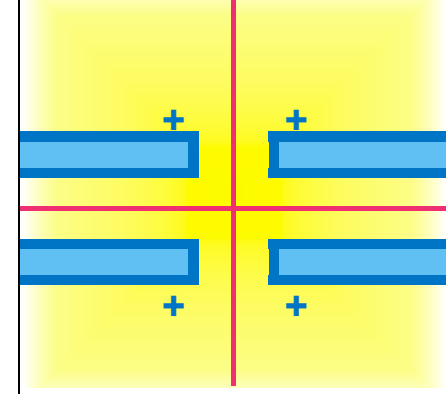
<p>R 1</p>	<p>R 2</p>	<p>R 2.1</p>
<p>R 3</p>	<p>R 3.1</p>	<p>R 3.2</p>
<p>R 3.3</p>	<p>R 3.4</p>	<p>R 4</p>
<p>R 4.1</p>	<p>R 4.2</p>	<p>R 4.3</p>

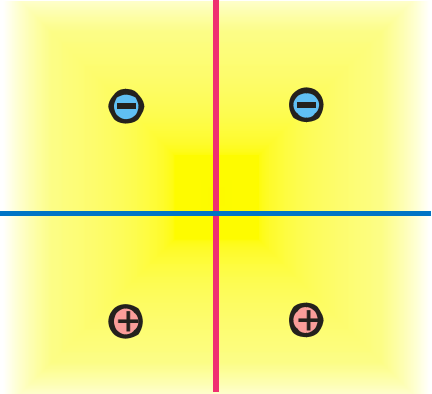
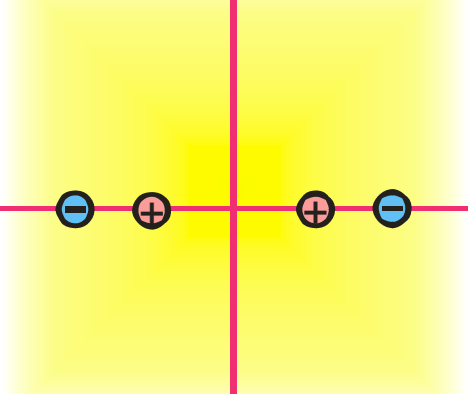
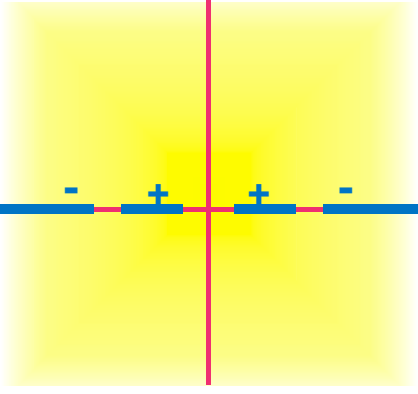
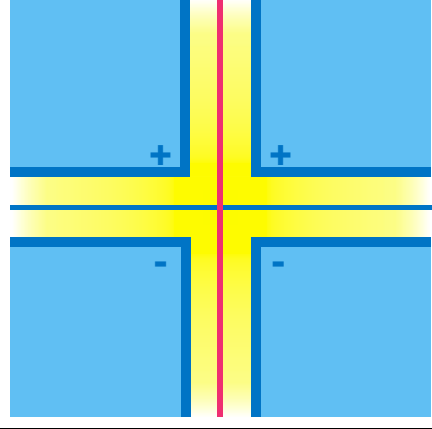
<p>R 4.4</p>	<p>R 4.5</p>	<p>R 4.6</p>
<p>R 4.7</p>	<p>R 5</p>	<p>R 6</p>
<p>R 7</p>	<p>R 7.1</p>	<p>R 6</p>
<p>R 7.2</p>	<p>R 4.8</p>	<p>R 4.9</p>

A 2.1	A 11	A 11.1
		
A 3	A 3.1	A 3.2
		 Ellipse
A 4	A 4.1	A 3.7
		
A 11.2	A 3.5	A 3.8
	 Kreissektor	 Kreisbogen

A 3.4	A 10.2	A 10.6
 <p>Kreispbogenzweieck, $\beta > 0$</p>		
R 5.1	A 3.10	R 2
	 <p>2 Kreisbögen</p>	
R 4.10	R 4.11	R 4.12
		
R 5.2	A 3.11	H 12.4
		

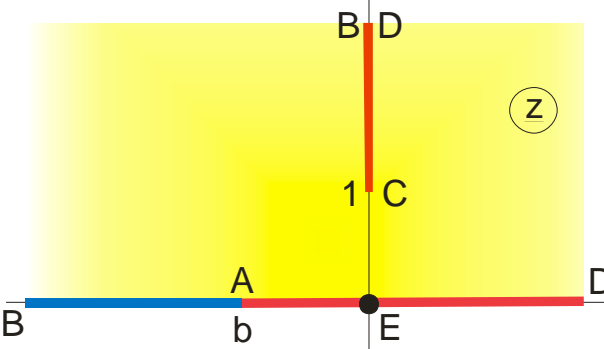
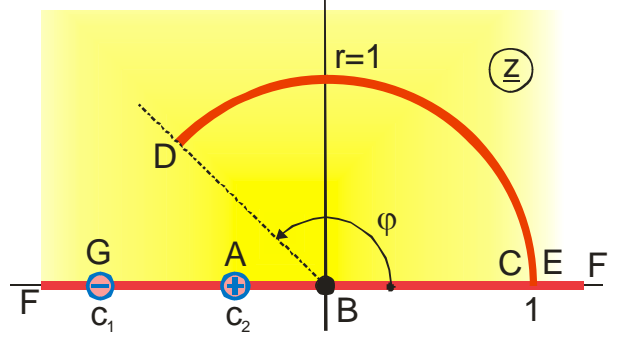
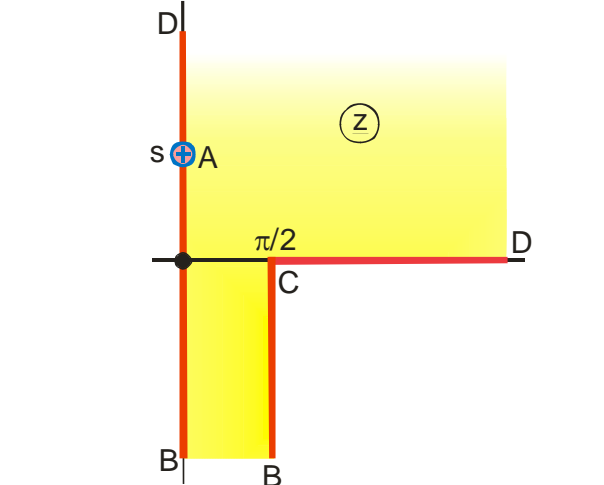
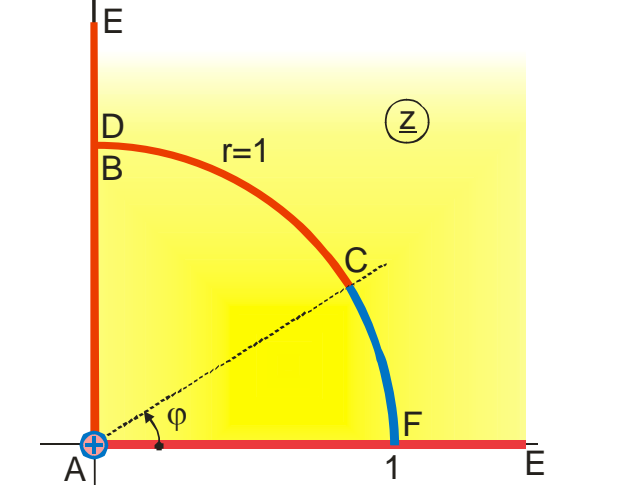
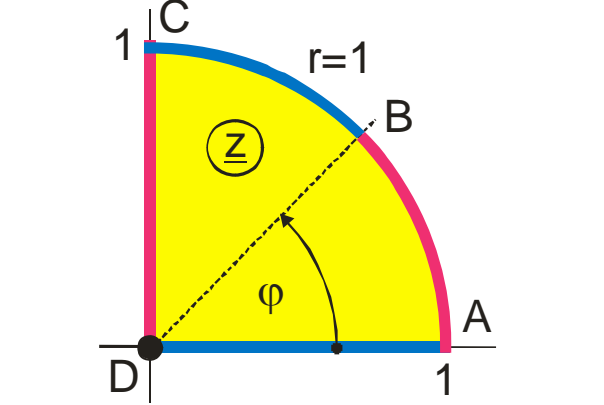
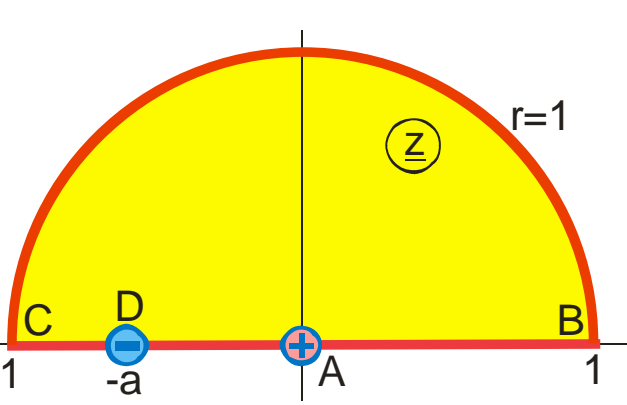
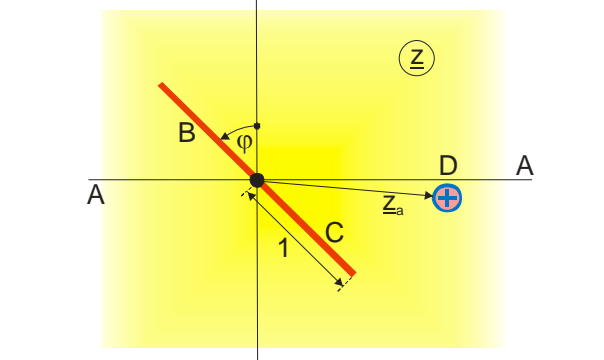
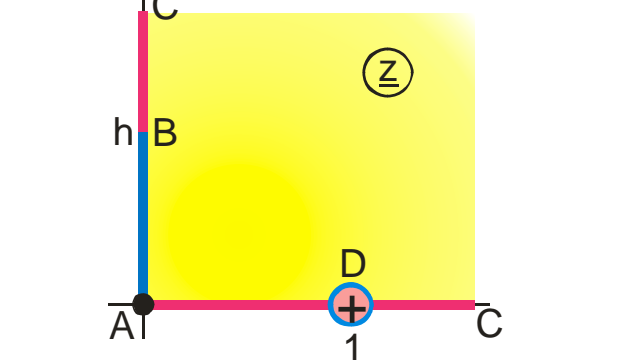
Gruppe S: Leitende Elektroden, symmetrisch angeordnet, gleich große, gleichnamige Ladung

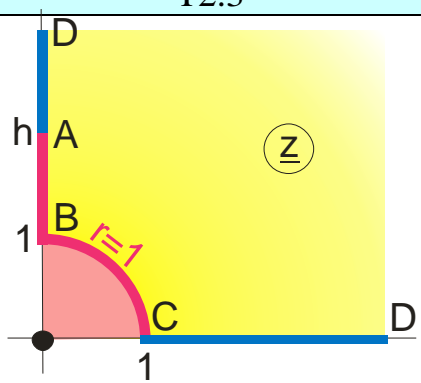
S 1	S 2	S 2.1
		
S 2.2	S 3	S 4
		
S 4.1	S 5	S 6
 Kreisbogen, Radius r		
A 2.1	R 5.2	P 6.2
		

L 2	L 4	K 3.7
		
P 3.1		
		

Gruppe T: Abbildungen mit nichtleitenden Rändern

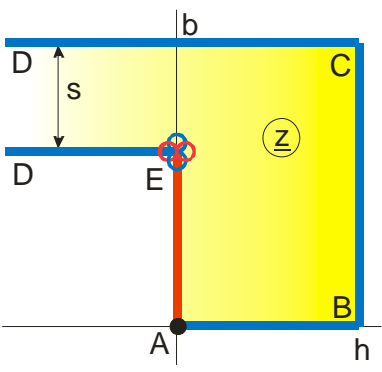
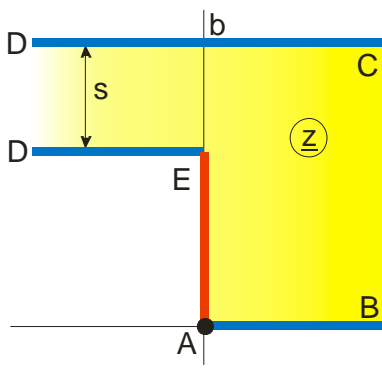
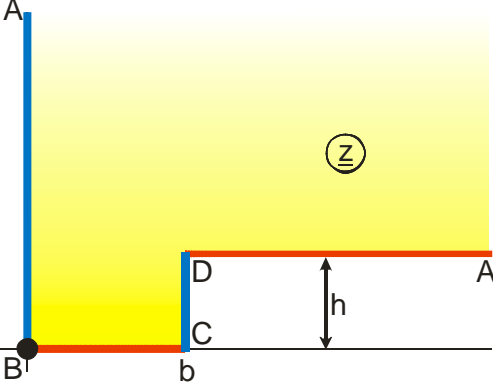
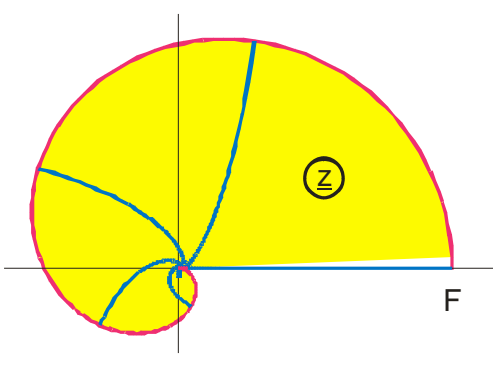
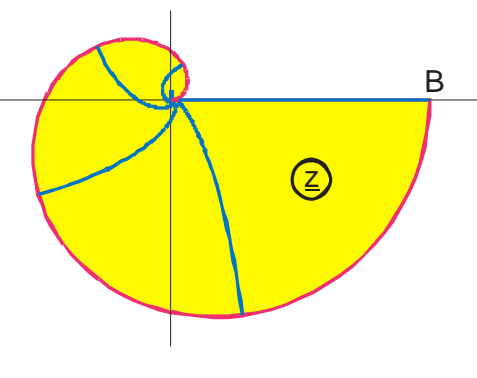
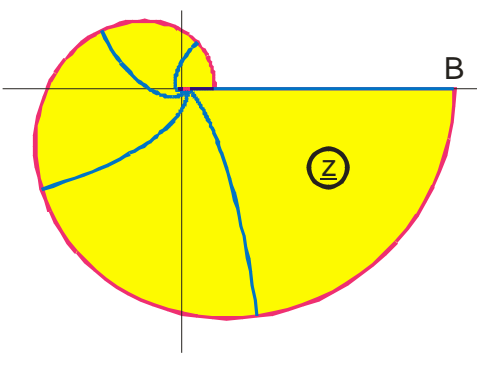
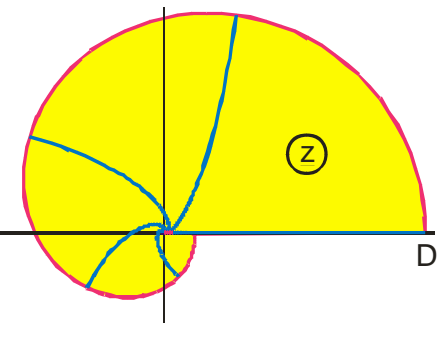
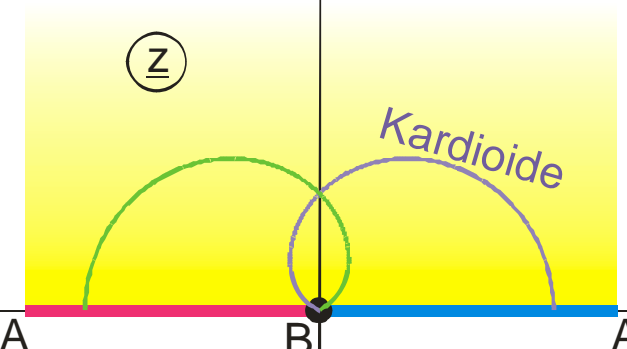
T 1	T 2
T 2.1	T 2.2
T 3	T 3.1
T 3.2	T 3.3

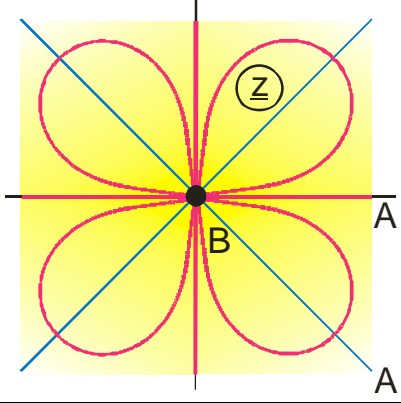
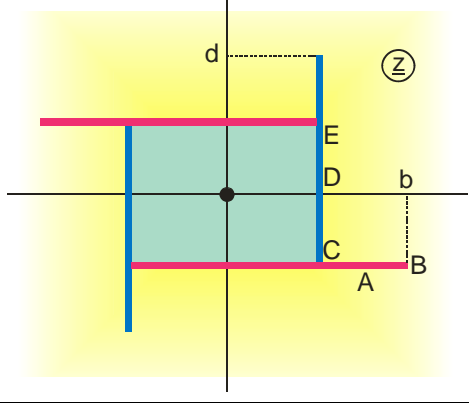
T 4	T 5
	
T 4.1	T 5.1
	
T 5.2	T 3.4
	
T 4.2	T 1.1
	

T2.3	
	

Gruppe U: Weitere Abbildungen, spezielle Funktionen

U 1	U 1.1
U 2	U 2.1
U 2.2	U 3
U 4	U 4.1

U 4.2	U 4.3
	
U 5	U 6.1
	
U 6.2	U 6.3
	
U 6.4	U 7
	

U 7.1	U 7.2
	

16. Basic-Unterprogramme

Im folgenden sind Basic-Unterprogramme aufgelistet, die für die Berechnung von Abbildungen benötigt werden, in deren Abbildungsfunktion elliptische Funktionen, elliptische Integrale oder Theta-Funktionen vorkommen. In der Programmsammlung sind diese im Programm A_ELLI.bas enthalten. Bei den einzelnen Abbildungen wird jedoch das Programm D_ELLI.bas aufgerufen. Dort sind die Unterprogramme in kompilierter Form enthalten.

Die Quellen für die benutzten Rekursionsformeln sind in den Kommentaren angegeben.

Die Unterprogramme stammen aus einer Zeit, als die Berechnung einiger konformer Abbildungen noch mehrere Minuten dauerte und sind deshalb bezüglich kurzer Rechenzeit optimiert worden. Anstelle von $C1^2$ wird deshalb $C1*C1$ benutzt (siehe z.B. Zeile 285) etc.

16.1 Elliptische Funktionen

16.1.1 Elliptische Funktion $sn(z,k)$

```

195  SUB Csn(U,V,K,X,Y)    ! CALL Scdz
200  !
205  ! - sn MIT KOMPLEXEM ARGUMENT ----- Abramowitz 16.21.2 -----
210  ! EINGABE : u+jv   und k
215  ! AUSGABE : x+jy
220  M=K*K
225  Kc=SQR(1-M)
230  CALL Scdz(U,K,K8,E8,S,C,D,Z)
235  CALL Scdz(V,Kc,K9,E9,S1,C1,D1,Z1)
240  IF V=K9 THEN
245  Y=0
250  IF U=0 THEN
255  X=0
260  Y=1.E+12
265  ELSE

```



```

270      X=1/(K*S)
275      END IF
280      ELSE
285      Nenn=C1*C1+M*S*S1*S*S1
290      X=S*D1/Nenn
295      Y=C*D*S1*C1/Nenn
300      END IF
305      SUBEND

```

16.1.2 Elliptische Funktion cn (z,k)

```

3190  SUB Ccn(U,V,K,X,Y)      ! CALL Scdz
3195  !
3200  ! cn mit komplexem Argument      Abramowitz 16.21.3
3205  ! EINGABE : u+jv  und  k
3210  ! AUSGABE : x+jy
3215  M=K*K
3220  Kc=SQR(1-M)
3225  CALL Scdz(U,K,K8,E8,S,C,D,Z)
3230  CALL Scdz(V,Kc,K9,E9,S1,C1,D1,Z1)
3235  Nenn=C1*C1+M*S*S1*S*S1
3240  Nenn1=C1*C1+M*S1*S1
3245  IF Nenn=0 THEN Nenn=1.E-7
3250  IF Nenn1=0 THEN Nenn1=1.E-7
3255  X=C*C1/Nenn
3260  Y=-S*D*S1*D1/Nenn
3265  IF U=K8 THEN
3270      X=0
3275      IF V=K9 THEN
3280          Y=-Kc/K
3285      ELSE
3290          Y=-Kc*S1*D1/Nenn1
3295      END IF
3300  END IF
3305  IF V=K9 AND U>0 THEN
3310      X=0
3315      IF U=K8 THEN
3320          Y=-Kc/K
3325      ELSE
3330          Y=-D/(K*S)
3335      END IF
3340  END IF
3345  IF U<0 THEN X=-X ! 4-Quadranten-Version
3350  IF U<0 THEN Y=-Y ! 4-Quadranten-Version
3355  SUBEND

```

16.1.3 Elliptische Funktion dn (z,k)

```

315  SUB Cdn(U,V,K,X,Y)      ! CALL Scdz

```

```

320      !
325      ! - dn MIT KOMPLEXEM ARGUMENT ----- Abramowitz 16.21.4 -----
330      ! EINGABE : u+jv   und k
335      ! AUSGABE : x+jy
340      M=K*K
345      Kc=SQR(1-M)
350      CALL Scdz(U,K,K0,E0,S,C,D,Z)
355      CALL Scdz(V,Kc,K0,E0,S1,C1,D1,Z1)
360      Nenn=C1*C1+M*S*S*S1*S1
365      X=D*C1*D1/Nenn
370      Y=-M*S*C*S1/Nenn
375      SUBEND

```

16.1.4 Zeta-Funktion $Z_a(z,k)$

```

3445     SUB Cza(Rt,It,K,Rz,Iz)    ! CALL Cea+Cfa+Ske
3450     !
3455     !           EINGABE : K ist Modul k
3460     !           ERGEBNIS : Z = Rz + j Iz
3465     ! Zeta-Funktion, algebraische Form
3470     CALL Ske(K,K8,E8)
3475     Ks=SQR(1-K*K)
3480     M9=Ks*Ks
3485     CALL Cea(Rt,It,Ks,1,M9,Re,Ie)
3490     CALL Cfa(Rt,It,K,Rf,If)
3495     Rz=Re-E8*Rf/K8
3500     Iz=Ie-E8*If/K8
3505     SUBEND

```

16.1.5 Zeta-Funktion $Z_t(\varphi,k)$

```

3365     SUB Czt(Phi,Psi,K,Rz,Iz)  ! CALL CE+Cf+Ske
3370     !
3375     ! Zeta-Funktion, trigonometrische Form
3380     !           EINGABE : K ist Modul k
3385     !           ERGEBNIS : Z = Rz + j Iz
3390     !           Abramowitz 17.4.27
3395     IF Phi=PI/2 AND Psi=0 THEN Phi=PI/2-1.E-7
3400     CALL Ske(K,K8,E8)
3405     Ks=SQR(1-K*K)
3410     M9=Ks*Ks
3415     CALL Ce(Phi,Psi,Ks,1,M9,Re,Ie)
3420     CALL Cf(Phi,Psi,K,Rf,If)
3425     Rz=Re-E8*Rf/K8
3430     Iz=Ie-E8*If/K8
3435     SUBEND

```

16.1.6 Zeta-Funktion $Z_e(z,k)$

```

385 SUB Cz(U,V,K,X,Y) ! CALL Scdz
390 !
395 ! - Zeta-Funktion mit komplexem Argument (elliptische Form) -----
400 ! EINGABE : u+jv und k *** Abramowitz 17.4.35/6 *****
405 ! AUSGABE : x+jy
410 M=K*K
415 Kc=SQR(1-M)
420 CALL Scdz(U,K,K8,E,S,C,D,Z)
425 CALL Scdz(V,Kc,K9,E,Ss,Cs,Ds,Zs)
430 Nenn=1-D*Ss*D*Ss
435 IF Nenn=0 THEN Nenn=1.E-9
440 X=Z+M*S*C*D*Ss*Ss/Nenn
445 Y=-Zs-PI*V/(2*K8*K9)+D*D*Ss*Cs*Ds/Nenn
450 IF U=0 AND V=K9 THEN Y=1.E+7
455 SUBEND

```

16.1.7 Elliptische Funktionen sn, cn, dn, $Z_e(x,k)$ sowie $K(k)$ und $E(k)$

```

465 SUB Scdz(X,K,K1,E,S,C,D,Z)
470 ! **** Abramow. 16.4 / 16.35 / 17.6 *
475 C0=K
480 B0=SQR(1-C0*C0)
485 A1=(1+B0)/2
490 B1=SQR(B0)
495 C1=(1-B0)/2
500 A2=(A1+B1)/2
505 B2=SQR(A1*B1)
510 C2=(A1-B1)/2
515 A3=(A2+B2)/2
520 B3=SQR(A2*B2)
525 C3=(A2-B2)/2
530 A4=(A3+B3)/2
535 B4=SQR(A3*B3)
540 C4=(A3-B3)/2
545 A5=(A4+B4)/2
550 C5=(A4-B4)/2
555 !
560 K1=PI/(A5+A5)
565 E=PI*(2-C0*C0-2*C1*C1-4*C2*C2-8*C3*C3-16*C4*C4-
32*C5*C5)/(4*A5)
570 !
575 F5=32*A5*X
580 F4=(F5+ASN(C5*SIN(F5)/A5))/2
585 F3=(F4+ASN(C4*SIN(F4)/A4))/2
590 F2=(F3+ASN(C3*SIN(F3)/A3))/2
595 F1=(F2+ASN(C2*SIN(F2)/A2))/2
600 F0=(F1+ASN(C1*SIN(F1)/A1))/2
605 !

```

```

610      S=SIN(F0)
615      C=COS(F0)
620      D=C/COS(F1-F0)
625      IF ABS(X)=K1 THEN D=B0
630      Z=C1*SIN(F1)+C2*SIN(F2)+C3*SIN(F3)+C4*SIN(F4)+C5*SIN(F5)
635      SUBEND

```

16.1.8 Elliptische Funktionen sn, cn, dn und $Z_e(z,k)$

```

1655      SUB Cscdz(U,V,K,Rs,Is,Rc,Ic,Rd,Id,Rz,Iz)    ! CALL Scdz
1660      !
1665      ! - sn , cn , dn , Z - mit komplexem Argument
1670      ! EINGABE : u+jv   und   k
1675      ! AUSGABE : Re + j Im
1680      M=K*K
1685      Kc=SQR(1-M)
1690      CALL Scdz(U,K,K8,E8,S,C,D,Z)
1695      CALL Scdz(V,Kc,K9,E9,S1,C1,D1,Z1)
1700      Nenn=C1*C1+M*S*S1*S*S1
1705      Nenn1=C1*C1+M*S1*S1
1710      IF Nenn1=0 THEN Nenn1=1.E-9
1715      IF Nenn=0 THEN Nenn=1.E-9
1720      IF S=0 THEN S=1.E-9
1725      IF K=0 THEN K=1.E-9
1730      !                               sn
1735      IF V=K9 THEN
1740          Is=0
1745          IF U=0 THEN
1750              Rs=1.E+12
1755          ELSE
1760              Rs=1/(K*S)
1765          END IF
1770      ELSE
1775          Rs=S*D1/Nenn
1780          Is=C*D*S1*C1/Nenn
1785      END IF
1790      !                               cn
1795      Rc=C*C1/Nenn
1800      Ic=-S*D*S1*D1/Nenn
1805      IF U=K8 THEN
1810          Rc=0
1815          IF V=K9 THEN
1820              Ic=-Kc/K
1825          ELSE
1830              Ic=-Kc*S1*D1/Nenn1
1835          END IF
1840      END IF
1845      IF V=K9 AND U>0 THEN
1850          Rc=0

```

```

1855      IF U=K8 THEN
1860          Ic=-Kc/K
1865      ELSE
1870          Ic=-D/(K*S)
1875      END IF
1880  END IF
1885      !                      dn
1890      IF V=K9 THEN
1895          Rd=0
1900          Id=-C/S
1905      ELSE
1910          Rd=D*C1*D1/Nenn
1915          Id=-M*S*C*S1/Nenn
1920      END IF
1925      !                      cz
1930      Nenn=1-D*S1*D*S1
1935      IF Nenn=0 THEN Nenn=1.E-9
1940      Rz=Z+M*S*C*D*S1*S1/Nenn
1945      Iz=-Z1-PI*V/(2*K8*K9)+D*D*S1*C1*D1/Nenn
1950  SUBEND

```

16.2 Elliptische Integrale

16.2.1 Vollständige elliptische Integrale K(k) und E(k)

```

2165  SUB Ske(K,K1,E)
2170      !-----
2175      DIM A(20),B(20),C(20)
2180      INTEGER I,J
2185      IF K=1 THEN
2190          K1=1.E+10
2195          E=1
2200      ELSE
2205          C(0)=K
2210          B(0)=SQR(1-C(0)*C(0))
2215          A(0)=1
2220          I=0
2225          LOOP
2230              I=I+1
2235              A(I)=(A(I-1)+B(I-1))/2
2240              B(I)=SQR(A(I-1)*B(I-1))
2245              C(I)=(A(I-1)-B(I-1))/2
2250              EXIT IF (I>14) OR ABS(C(I))<1.E-8
2255          END LOOP
2260          K1=PI/(2*A(I))
2265          E=2
2270          L=.5
2275          FOR J=0 TO I
2280              L=L+L

```

```

2285      E=E-L*C(J)*C(J)
2290      NEXT J
2295      E=PI/(4*A(I))*E
2300      END IF
2305      SUBEND

```

16.2.2 Vollständige elliptische Integrale K, E, Π , $-\infty < k_c, p, a, b < +\infty$

```

2980      SUB Kep(Kc0,P0,A0,B0,Cei)
2985      !
2990      Kc=Kc0
2995      A=A0
3000      B=B0
3005      P=P0
3010      C=12
3015      Ca=10^(-C/2)
3020      IF Kc=0 THEN Kc=1.E-12
3025      D=ABS(Kc)
3030      M=1
3035      IF P>0 THEN
3040          P=SQR(P)
3045          B=B/P
3050      ELSE
3055          F=Kc*Kc
3060          Q=1-F
3065          G=1-P
3070          F=F-P
3075          Q=(B-A*P)*Q
3080          P=SQR(F/G)
3085          A=(A-B)/G
3090          B=-Q/(G*G*P)+A*P
3095      END IF
3100      Mar: F=A
3105      A=B/P+A
3110      G=D/P
3115      B=F*G+B
3120      B=B+B
3125      P=G+P
3130      G=M
3135      M=Kc+M
3140      !
3145      IF ABS(G-Kc)>G*Ca THEN
3150          Kc=SQR(D)
3155          Kc=Kc+Kc
3160          D=Kc*M
3165          GOTO Mar
3170      END IF
3175      Cei=PI/2*(A*M+B)/(M*M+M*P)
3180      SUBEND

```

16.2.3 Elliptisches Integral 1. Art $F_a(x,k)$, reelles Argument

```

25  SUB F1(X,K0,F1)
30  !
35  !      BERECHNUNG DES ELLIPTISCHEN INTEGRALS 1.ART:
F1(X|K)
40  !      ARGUMENT X, MODUL K, ERGEBNIS F1
45  !      x = tan(Phi)
50  K=K0
55  D=8      ! AUF D STELLEN GENAU
60  IF X=0 THEN
65  F1=0
70  ELSE
75  IF K=1 THEN K=K-1.E-16
80  INTEGER B2
85  B5=ABS(1/X)
90  B0=SQR(1-K*K)
95  B1=1
100 B2=0
105 L1: B3=B1*B0
110 B4=B1
115 B1=B0+B1
120 B5=-B3/B5+B5
125 IF B5=0 THEN B5=SQR(B3)*10^(-D+2)
130 IF ABS(B4-B0)>10^(-D/2)*B4 THEN L2
135 GOTO L3
140 L2: B0=SQR(B3)*2
145 B2=B2+B2
150 IF B5<0 THEN B2=1+B2
155 GOTO L1
160 L3: IF B5<0 THEN B2=1+B2
165 B3=(ATN(B1/B5)+PI*B2)/B1
170 F1=B3
175 IF X<0 THEN F1=-B3
180 END IF
185 SUBEND

```

16.2.4 Elliptisches Integral 1. Art $F_t(\varphi,k)$, reelles Argument

```

2315 SUB F(Phi,K0,F1)
2320 !=====
2325 !      BERECHNUNG DES ELLIPTISCHEN INTEGRALS 1.ART:
F1(Phi|k)
2330 !      ARGUMENT Phi, MODUL k, ERGEBNIS F1
2335 X=TAN(Phi)
2340 K=K0
2345 D=8      ! AUF D STELLEN GENAU
2350 IF X=0 THEN

```

```

2355      F1=0
2360      ELSE
2365          IF K=1 THEN K=K-1.E-16
2370          INTEGER B2
2375          B5=ABS(1/X)
2380          B0=SQR(1-K*K)
2385          B1=1
2390          B2=0
2395 L1:   B3=B1*B0
2400          B4=B1
2405          B1=B0+B1
2410          B5=-B3/B5+B5
2415          IF B5=0 THEN B5=SQR(B3)*10^(-D+2)
2420          IF ABS(B4-B0)>10^(-D/2)*B4 THEN L2
2425          GOTO L3
2430 L2:   B0=SQR(B3)*2
2435          B2=B2+B2
2440          IF B5<0 THEN B2=1+B2
2445          GOTO L1
2450 L3:   IF B5<0 THEN B2=1+B2
2455          B3=(ATN(B1/B5)+PI*B2)/B1
2460          F1=B3
2465          IF X<0 THEN F1=-B3
2470      END IF
2475      SUBEND

```

16.2.5 Elliptisches Integral 1.Art $F_a(z,k)$

```

5925      SUB Cfa(U,V,K,X,Y)          ! CALL F1
5930      !
5935      ! Ellipt. Integral 1.Art mit komplexem Argument
5940      ! EINGABE : u+jv  und k      Abramowitz
5945      ! AUSGABE : x+jy
5950      COMPLEX W1,W2
5955      IF ABS(V)<1.E-12 THEN V=0
5960      W1=CMPLX(U,V)
5965      IF ABS(U)=1 AND V=0 THEN
5970          W1=W1-1.E-7

5975      END IF
5980      W2=ASN(W1)
5985      H=REAL(W2)
5990      S=IMAG(W2)
5995      M=K*K
6000      Ms=1-M
6005      Kc=SQR(Ms)
6010      IF ABS(S)>100 THEN S=SGN(S)*100
6015      IF H=0 THEN
6020          X=0

```



```

6025      B=SINH(S)
6030      CALL F1(B,Kc,Y)
6035      GOTO L1
6040  END IF
6045  IF S=0 THEN
6050      L=TAN(H)
6055      B=0
6060      GOTO L2
6065  END IF
6070  H1=H
6075  IF ABS(H)=PI/2 THEN H1=H-1.E-6
6080  T1=TAN(H1)
6085  T2=T1*T1
6090  IF T2=0 THEN T2=1.E-5
6095  S1=SIN(H)
6100  IF S1=0 THEN S1=1.E-5
6105  P1=1/T2+M*SINH(S)*SINH(S)/(S1*S1)-Ms
6110  P2=Ms/T2
6115  X0=P1/2+SQR(P2+P1*P1/4)
6120  IF X0=0 THEN X0=1.E-8
6125  L=1/SQR(X0)
6130  A=(T2*X0-1)/M
6135  B=SQR(ABS(A))
6140 L2: CALL F1(L,K,X)
6145      CALL F1(B,Kc,Y)
6150      IF H<0 THEN X=-ABS(X)      ! ***
6155 L1: SUBEND

```

16.2.6 Elliptisches Integral 1. Art $F_t(\phi, k)$

```

1205  SUB Cf(Phi,Psi,K,X,Y)  ! CALL F1
1210  !
1215  ! Ellipt. Integral 1.Art mit komplexem Argument
1220  ! EINGABE : Phi+j Psi   und k   *** Abramowitz 17.4.11
1225  ! AUSGABE : x+jy       *** benoetigt Sub F1(x,k,F1)
1230      M=K*K
1235      Ms=1-M
1240      Kc=SQR(Ms)
1245      IF ABS(Psi)>100 THEN Psi=SGN(Psi)*100
1250      IF Phi=0 THEN
1255          X=0
1260          Mue=SINH(Psi)
1265          CALL F1(Mue,Kc,Y)
1270          GOTO L2
1275      END IF
1280      IF Psi=0 THEN
1285          Lam=ABS(TAN(Phi))
1290          Mue=0
1295          GOTO L1

```

```

1300     END IF
1305     Phi1=Phi
1310     IF ABS(Phi)=PI/2 THEN Phi1=Phi-1.E-6
1315     Tanu=TAN(Phi1)
1320     Tanu2=Tanu*Tanu
1325     IF Tanu2=0 THEN Tanu2=1.E-5
1330     Sinu=SIN(Phi1)
1335     IF Sinu=0 THEN Sinu=1.E-5
1340     P1=1/Tanu2+M*SINH(Psi)*SINH(Psi)/(Sinu*Sinu)-Ms
1345     P2=Ms/Tanu2
1350     X0=P1/2+SQR(P2+P1*P1/4)
1355     IF X0=0 THEN X0=1.E-8
1360     Lam=1/SQR(X0)
1365     Arg=(Tanu2*X0-1)/M
1370     Mue=SQR(ABS(Arg))
1375 L1: CALL F1(Lam,K,X)
1380     CALL F1(Mue,Kc,Y)
1385     IF Phi<0 THEN X=-ABS(X)
1390     IF Psi<0 THEN Y=-ABS(Y)
1395 L2: SUBEND

```

16.2.7 Elliptisches Integral 2.Art $E_a(z,k)$

```

3640     SUB Cea(U1,V1,Kc0,A0,B0,U,V)
3645     !
3650     COMPLEX Xy,X1,X2,Ff,E3,G,N,T,Q,P,Dd,R,Z
3655     COMPLEX Y1,Y2,X3,X4,W,Z1,Z2
3660     Kc=Kc0
3665     A=A0
3670     B=B0
3675     IF V1=0 THEN V1=1.E-7
3680     Z1=CMPLX(U1,V1)
3685     Z2=1-Z1*Z1
3690     R2=REAL(Z2)
3695     I2=IMAG(Z2)
3700     IF R2=0 AND I2=0 THEN
3705         Z2=Z2+1.E-7
3710     END IF
3715     W=Z1/SQR(Z2)
3720     X=REAL(W)
3725     Y=IMAG(W)
3730     !   BERECHNUNG DES ELLIPT. INTEGRALS 2.ART:  $E_1(u_1+jv_1|kc)$ 
3735     !   PARAMETER    a, b
3740     !               a=1    b=kc*kc
3745     !   ERGEBNIS:    u+jv
3750     !   MODUL:       kc = SQR(1-k^2)
3755     !
3760     X=ABS(X)
3765     IF Kc=0 THEN Kc=Kc-1.E-7

```

```
3770    INTEGER I,J,L,Genau
3775    DIM D1(20),D2(20)
3780    Genau=8
3785    Cc=10^(-Genau)
3790    Sy=SGN(Y)
3795    Y=ABS(Y)
3800    Xy=CMPLX(X,Y)
3805    C=REAL(Xy*Xy)
3810    E2=IMAG(Xy*Xy)
3815    D=Kc*Kc
3820    K=1-D
3825    IF C=-1 THEN C=C+1.E-12
3830    E1=1+C
3835    X1=CMPLX(1+C*D,D*E2)
3840    X2=CMPLX(E1,E2)
3845    F1=REAL(X1/X2)
3850    F2=ABS(X2*X2)
3855    F2=-K*X*Y*2/F2
3860    Ff=CMPLX(F1,F2)
3865    D3=SQR((ABS(Ff)+ABS(REAL(Ff)))/2)
3870    IF D3=0 THEN D3=1.E-7
3875    D4=IMAG(Ff)/(D3+D3)
3880    IF F1<0 THEN
3885        F1=D3
3890        D3=-D4
3895        D4=-F1
3900    END IF
3905    IF K<0 THEN
3910        D3=ABS(D3)
3915        D4=ABS(D4)
3920    END IF
3925    C=1+D3
3930    E3=CMPLX(E1,E2)
3935    G=CMPLX(C,D4)
3940    F1=REAL(E3*G)
3945    F2=IMAG(E3*G)
3950    N=CMPLX(F1,F2)
3955    Rn=REAL(N)
3960    In=IMAG(N)
3965    IF Rn=0 AND In=0 THEN
3970        N=N+1.E-7
3975    END IF
3980    D1(0)=REAL(Xy/N)
3985    D2(0)=IMAG(Xy/N)
3990    H=A-B
3995    I=1
4000    D=1
4005    F=1
4010    M=1
4015    Kc=ABS(Kc)
```

```

4020      E=A
4025      A=B+A
4030      L=4
4035 L1: M1=(Kc+M)/2
4040      M2=M1*M1
4045      K=F*K/(4*M2)
4050      B=E*Kc+B
4055      E=A
4060      T=CMPLX(Kc+M*D3,M*D4)
4065      Q=CMPLX(C,D4)
4070      F1=REAL(T/Q)
4075      F2=ABS(Q*Q)
4080      P=CMPLX(F1/M1,K*D4*2/F2)
4085      D3=SQR((ABS(P)+ABS(REAL(P)))/2)
4090      IF D3=0 THEN D3=1.E-7
4095      D4=IMAG(P)/(D3+D3)
4100      Dd=CMPLX(D3,D4)
4105      X4=CMPLX(X,Y)
4110      F1=REAL(Dd*X4)
4115      F2=IMAG(Dd*X4)
4120      X=ABS(F1)
4125      Y=ABS(F2)
4130      A=B/M1+A
4135      L=L*2
4140      C=1+D3
4145      D=K*D/2
4150      X3=CMPLX(X,Y)
4155      E1=REAL(X3*X3)
4160      E2=IMAG(X3*X3)
4165      K=K*K
4170      Q=CMPLX(C,D4)
4175      R=CMPLX(E1*M2+1,E2*M2)
4180      F1=REAL(Q*R)
4185      F2=IMAG(Q*R)
4190      Z=CMPLX(D*X,D*Y)
4195      N=CMPLX(F1,F2)
4200      Rn=REAL(N)
4205      In=IMAG(N)
4210      IF Rn=0 AND In=0 THEN
4215          N=N+1.E-7
4220      END IF
4225      D1(I)=REAL(Z/N)
4230      D2(I)=IMAG(Z/N)
4235      IF K>Cc THEN
4240          Kc=SQR(M*Kc)
4245          F=M2
4250          M=M1
4255          I=1+I
4260          GOTO L1
4265      !

```

```

4270     END IF
4275     F1=0
4280     F2=0
4285     FOR J=I TO 0 STEP -1
4290         F1=D1(J)+F1
4295         F2=D2(J)+F2
4300     NEXT J
4305     X=M1*X
4310     Y=M1*Y
4315     Y1=CMPLX(1-Y,X)
4320     Y2=CMPLX(1+Y,-X)
4325     E1=REAL(Y1/Y2)
4330     E2=ABS(Y2*Y2)
4335     E2=X*2/E2
4340     D=A/(M1*L)
4345     IF E1=0 THEN
4350         U=PI/2
4355     ELSE
4360         A=E2/E1
4365         U=ATN(A)
4370         IF A<0 THEN U=PI+U
4375     END IF
4380     A=D*Sy/2
4385     U=D*U+F1*H
4390     V=(-1-LOG(E1*E1+E2*E2))*A+F2*H*Sy+A
4395     IF U1<0 THEN U=-U
4400 Ende: SUBEND

```

16.2.8 Elliptisches Integral 2.Art $E_t(\phi, k)$

```

4410     SUB Ce(Phi,Psi,Kc0,A0,B0,U,V)
4415     !
4420     COMPLEX Xy,X1,X2,Ff,E3,G,N,T,Q,P,Dd,R,Z
4425     COMPLEX Y1,Y2,X3,X4,W,S
4430     Kc=Kc0
4435     A=A0
4440     B=B0
4445     IF ABS(Phi)-PI/2<1.E-5 AND Psi=0 THEN
4450         Phi=Phi-1.E-5
4455     END IF
4460     S=CMPLX((Phi),(Psi))
4465     W=TAN(S)
4470     X=ABS(REAL(W))
4475     Y=IMAG(W)
4480     !   Berechnung des ellipt. Integrals 2.Art:  $E_1(\Phi+j\Psi|k)$ 
4485     !   wenn      a=1   b=k*c*k
4490     !   Parameter   a, b
4495     !   Ergebnis:   u+jv
4500     !   kompl. Modul:  $kc = \text{SQR}(1-k^2)$ 

```

```
4505     IF Kc=0 THEN Kc=Kc-1.E-7
4510     INTEGER I,J,L,Genau
4515     DIM D1(20),D2(20)
4520     Genau=8
4525     Cc=10^(-Genau)
4530     Sy=SGN(Y)
4535     Y=ABS(Y)
4540     Xy=CMPLX(X,Y)
4545     C=REAL(Xy*Xy)
4550     E2=IMAG(Xy*Xy)
4555     D=Kc*Kc
4560     K=1-D
4565     IF C=-1 THEN C=C+1.E-12
4570     E1=1+C
4575     X1=CMPLX(1+C*D,D*E2)
4580     X2=CMPLX(E1,E2)
4585     F1=REAL(X1/X2)
4590     F2=ABS(X2*X2)
4595     F2=-K*X*Y*2/F2
4600     Ff=CMPLX(F1,F2)
4605     N1=SQR((ABS(Ff)+ABS(REAL(Ff)))/2)
4610     IF N1=0 THEN N1=1.E-7
4615     N2=IMAG(Ff)/(N1+N1)
4620     IF F1<0 THEN
4625         F1=N1
4630         N1=-N2
4635         N2=-F1
4640     END IF
4645     IF K<0 THEN
4650         N1=ABS(N1)
4655         N2=ABS(N2)
4660     END IF
4665     C=1+N1
4670     E3=CMPLX(E1,E2)
4675     G=CMPLX(C,N2)
4680     F1=REAL(E3*G)
4685     F2=IMAG(E3*G)
4690     N=CMPLX(F1,F2)
4695     Ah=ABS(N)
4700     IF Ah=0 THEN
4705         N=N+1.E-7
4710     END IF
4715     D1(0)=REAL(Xy/N)
4720     D2(0)=IMAG(Xy/N)
4725     H=A-B
4730     I=1
4735     D=1
4740     F=1
4745     M=1
4750     Kc=ABS(Kc)
```

```

4755      E=A
4760      A=B+A
4765      L=4
4770 L1: M1=(Kc+M)/2
4775      M2=M1*M1
4780      K=F*K/(4*M2)
4785      B=E*Kc+B
4790      E=A
4795      T=CMPLX(Kc+M*N1,M*N2)
4800      Q=CMPLX(C,N2)
4805      F1=REAL(T/Q)
4810      F2=ABS(Q*Q)
4815      P=CMPLX(F1/M1,K*N2*2/F2)
4820      N1=SQR((ABS(P)+ABS(REAL(P)))/2)
4825      IF N1=0 THEN N1=1.E-7
4830      N2=IMAG(P)/(N1+N1)
4835      Dd=CMPLX(N1,N2)
4840      X4=CMPLX(X,Y)
4845      F1=REAL(Dd*X4)
4850      F2=IMAG(Dd*X4)
4855      X=ABS(F1)
4860      Y=ABS(F2)
4865      A=B/M1+A
4870      L=L*2
4875      C=1+N1
4880      D=K*D/2
4885      X3=CMPLX(X,Y)
4890      E1=REAL(X3*X3)
4895      E2=IMAG(X3*X3)
4900      K=K*K
4905      Q=CMPLX(C,N2)
4910      R=CMPLX(E1*M2+1,E2*M2)
4915      F1=REAL(Q*R)
4920      F2=IMAG(Q*R)
4925      Z=CMPLX(D*X,D*Y)
4930      N=CMPLX(F1,F2)
4935      Ah=ABS(N)
4940      IF Ah=0 THEN
4945          N=N+1.E-7
4950      END IF
4955      D1(I)=REAL(Z/N)
4960      D2(I)=IMAG(Z/N)
4965      IF K>Cc THEN
4970          Kc=SQR(M*Kc)
4975          F=M2
4980          M=M1
4985          I=1+I
4990          GOTO L1
4995      !.....
5000      END IF

```

```

5005      F1=0
5010      F2=0
5015      FOR J=I TO 0 STEP -1
5020          F1=D1(J)+F1
5025          F2=D2(J)+F2
5030      NEXT J
5035      X=M1*X
5040      Y=M1*Y
5045      Y1=CMPLX(1-Y,X)
5050      Y2=CMPLX(1+Y,-X)
5055      E1=REAL(Y1/Y2)
5060      E2=ABS(Y2*Y2)
5065      E2=X*2/E2
5070      D=A/(M1*L)
5075      IF E1=0 THEN
5080          U=PI/2
5085      ELSE
5090          A=E2/E1
5095          U=ATN(A)
5100          IF A<0 THEN U=PI+U
5105      END IF
5110      A=D*Sy/2
5115      U=D*U+F1*H
5120      V=(-1-LOG(E1*E1+E2*E2))*A+F2*H*Sy+A
5125      IF Phi<0 THEN U=-U
5130 Ende: SUBEND

```

16.2.9 Elliptisches Integral 2.Art $E_e(z,k)$

```

3515      SUB Cee(U,V,K,Re,Ie)      ! CALL Scdz
3520      !
3525      ! ellipt. Integral 2.Art, elliptische Form
3530      ! EINGABE : u+jv  und k    Abramowitz 17.4.28
3535      ! AUSGABE : Re + j Ie
3540      M=K*K
3545      Kc=SQR(1-M)
3550      CALL Scdz(U,K,K8,E8,S,C,D,Z)
3555      CALL Scdz(V,Kc,K9,E9,Ss,Cs,Ds,Zs)
3560      Nenn=1-D*Ss*D*Ss
3565      IF Nenn=0 THEN Nenn=1.E-12
3570      X=Z+M*S*C*D*Ss*Ss/Nenn
3575      Y=-Zs-PI*V/(2*K8*K9)+D*D*Ss*Cs*Ds/Nenn
3580      Re=X+U*E8/K8
3585      Ie=Y+V*E8/K8
3590      IF U=0 AND V=K9 THEN
3595          Re=1.E+9
3600          Ie=1.E+9
3605      END IF
3610      IF U=K8 AND V=K9 THEN !**  ?

```



```

3615      Re=E8
3620      Ie=K9-E9
3625      END IF
3630      SUBEND

```

16.2.10 Elliptisches Integral 2.Art $E_a(z, k_c, a, b)$, $B_a(z, k, a = 1, b = 0)$, $D_a(z, k, a = 0, b = 1)$

```

5140      SUB Cea4(U1,V1,Kc0,A0,B0,U,V)  ! CALL Ske
5145      !
5150      COMPLEX Xy,X1,X2,Ff,E3,G,N,T,Q,P,Dd,R,Z
5155      COMPLEX Y1,Y2,X3,X4,W,Z1,Z2
5160      Kc=Kc0
5165      A=A0
5170      B=B0
5175      IF V1=0 THEN V1=1.E-7
5180      Z1=CMPLX(U1,V1)
5185      Z2=1-Z1*Z1
5190      A2=ABS(Z2)
5195      IF A2=0 THEN
5200          Z2=Z2+1.E-7
5205      END IF
5210      W=Z1/SQR(Z2)
5215      X=ABS-REAL(W))
5220      Y=IMAG(W)
5225      !   BERECHNUNG DES ELLIPT. INTEGRALS 2.ART:  E1(u1+jv1|kc)
5230      !   PARAMETER      a, b
5235      !           a=1    b=kc*kc
5240      !   ERGEBNIS:      u+jv
5245      !   MODUL:        kc = SQR(1-k^2)
5250      !
5255      IF Kc=0 THEN Kc=Kc-1.E-7
5260      INTEGER I,J,L,Genau
5265      DIM D1(20),D2(20)
5270      Genau=8
5275      Cc=10^(-Genau)
5280      Sy=SGN(Y)
5285      Y=ABS(Y)
5290      Xy=CMPLX(X,Y)
5295      C=REAL(Xy*Xy)
5300      E2=IMAG(Xy*Xy)
5305      D=Kc*Kc
5310      K=1-D
5315      !
5320      IF A0=1 AND B0=0 THEN
5325          CALL Ske(Kc,K9,E9)
5330          B1=E9/K-K9
5335      END IF
5340      !

```

```

5345     IF C=-1 THEN C=C+1.E-12
5350     E1=1+C
5355     X1=CMPLX(1+C*D,D*E2)
5360     X2=CMPLX(E1,E2)
5365     F1=REAL(X1/X2)
5370     F2=ABS(X2*X2)
5375     F2=-K*X*Y*2/F2
5380     Ff=CMPLX(F1,F2)
5385     N1=SQR((ABS(Ff)+ABS(REAL(Ff)))/2)
5390     IF N1=0 THEN N1=1.E-7
5395     N2=IMAG(Ff)/(N1+N1)
5400     IF F1<0 THEN
5405         F1=N1
5410         N1=-N2
5415         N2=-F1
5420     END IF
5425     IF K<0 THEN
5430         N1=ABS(N1)
5435         N2=ABS(N2)
5440     END IF
5445     C=1+N1
5450     E3=CMPLX(E1,E2)
5455     G=CMPLX(C,N2)
5460     F1=REAL(E3*G)
5465     F2=IMAG(E3*G)
5470     N=CMPLX(F1,F2)
5475     Ah=ABS(N)
5480     IF Ah=0 THEN
5485         N=N+1.E-7
5490     END IF
5495     D1(0)=REAL(Xy/N)
5500     D2(0)=IMAG(Xy/N)
5505     H=A-B
5510     I=1
5515     D=1
5520     F=1
5525     M=1
5530     Kc=ABS(Kc)
5535     E=A
5540     A=B+A
5545     L=4
5550 L1: M1=(Kc+M)/2
5555     M2=M1*M1
5560     K=F*K/(4*M2)
5565     B=E*Kc+B
5570     E=A
5575     T=CMPLX(Kc+M*N1,M*N2)
5580     Q=CMPLX(C,N2)
5585     F1=REAL(T/Q)
5590     F2=ABS(Q*Q)

```

```

5595     P=CMPLX(F1/M1,K*N2*2/F2)
5600     N1=SQR((ABS(P)+ABS(REAL(P)))/2)
5605     IF N1=0 THEN N1=1.E-7
5610     N2=IMAG(P)/(N1+N1)
5615     Dd=CMPLX(N1,N2)
5620     X4=CMPLX(X,Y)
5625     F1=REAL(Dd*X4)
5630     F2=IMAG(Dd*X4)
5635     X=ABS(F1)
5640     Y=ABS(F2)
5645     A=B/M1+A
5650     L=L*2
5655     C=1+N1
5660     D=K*D/2
5665     X3=CMPLX(X,Y)
5670     E1=REAL(X3*X3)
5675     E2=IMAG(X3*X3)
5680     K=K*K
5685     Q=CMPLX(C,N2)
5690     R=CMPLX(E1*M2+1,E2*M2)
5695     F1=REAL(Q*R)
5700     F2=IMAG(Q*R)
5705     Z=CMPLX(D*X,D*Y)
5710     N=CMPLX(F1,F2)
5715     Ah=ABS(N)
5720     IF Ah=0 THEN
5725         N=N+1.E-7
5730     END IF
5735     D1(I)=REAL(Z/N)
5740     D2(I)=IMAG(Z/N)
5745     IF K>Cc THEN
5750         Kc=SQR(M*Kc)
5755         F=M2
5760         M=M1
5765         I=1+I
5770         GOTO L1
5775     !
5780     END IF
5785     F1=0
5790     F2=0
5795     FOR J=I TO 0 STEP -1
5800         F1=D1(J)+F1
5805         F2=D2(J)+F2
5810     NEXT J
5815     X=M1*X
5820     Y=M1*Y
5825     Y1=CMPLX(1-Y,X)
5830     Y2=CMPLX(1+Y,-X)
5835     E1=REAL(Y1/Y2)
5840     E2=ABS(Y2*Y2)

```

```

5845     E2=X*2/E2
5850     D=A/(M1*L)
5855     IF E1=0 THEN
5860         U=PI/2
5865     ELSE
5870         A=E2/E1
5875         U=ATN(A)
5880         IF A<0 THEN U=PI+U
5885     END IF
5890     A=D*Sy/2
5895     U=D*U+F1*H
5900     V=(-1-LOG(E1*E1+E2*E2))*A+F2*H*Sy+A+B1
5905     IF U1<0 THEN U=-U
5910     IF V1<0 THEN V=V-B1-B1
5915 Ende: SUBEND

```

16.2.11 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_a(z,k,n)$

```

2680     SUB Cpia(Rt,It,L8,Rn,In,X,Y)      ! CALL Ske+Cscdz+Ce+Theta4
2685     !
2690     ! PI , algebraische Form, n komplex
2695     ! EINGABE : u+jv und k = L8      Abramowitz 17.7.3, Lawden S.68
2700     ! AUSGABE : x+jy
2705     COMPLEX Ltm,Ltp,Tm,Tp,Cn,Q,Scd,Cz,Cu,Z,W1,W2
2710     K=L8
2715     IF K=1 THEN K=1-1.E-8
2720     IF K>1 OR K<0 THEN L1
2725     Kc=SQR(1-K*K)
2730     !
2735     W1=CMPLX(Rt,It)
2740     Rw=ABS-REAL(W1))
2745     Iw=IMAG(W1)
2750     IF Rw=1 AND Iw=0 THEN
2755         W1=W1+1.E-7
2760     END IF
2765     W2=ASN(W1)
2770     U=REAL(W2)
2775     V=IMAG(W2)
2780     !
2785     Cn=CMPLX(Rn,In)
2790     Q=ASN(SQR(Cn)/K)
2795     !
2800     CALL Ske(K,K8,E8)
2805     CALL Ske(Kc,K9,E9)
2810     Pk=PI/(K8+K8)
2815     Rq=REAL(Q)
2820     Iq=ABS(IMAG(Q))
2825     CALL Ce(Rq,Iq,Kc,1,1,Rf,If)
2830     !

```

```

2835 CALL Cscdz(Rf,If,L8,Rs,Is,Rc,Ic,Rd,Id,Rz,Iz)
2840 Cz=CMPLX(Rz,Iz)
2845 Scd=CMPLX(Rs,Is)/(CMPLX(Rc,Ic)*CMPLX(Rd,Id))
2850 !
2855 CALL Ce(U,V,Kc,1,1,Uu,Vv)
2860 Cu=CMPLX(Uu,Vv)
2865 Tau=K9/K8
2870 !
2875 CALL Theta4(Tau,(Uu+Rf)*Pk,(Vv+If)*Pk,Rtp,Itp)
2880 CALL Theta4(Tau,(Uu-Rf)*Pk,(Vv-If)*Pk,Rtm,Itm)
2885 Tp=CMPLX(Rtp,Itp)
2890 Tm=CMPLX(Rtm,Itm)
2895 Ap=ABS(Tp)
2900 IF Ap=0 THEN
2905     Tp=Tp+1.E-7
2910 END IF
2915 Am=ABS(Tm)
2920 IF Am=0 THEN
2925     Tm=Tm+1.E-7
2930 END IF
2935 Ltp=LOG(Tp)
2940 Ltm=LOG(Tm)
2945 Z=Cu+Scd*(.5*(Ltm-Ltp)+Cu*Cz)
2950 X=REAL(Z)
2955 Y=IMAG(Z)
2960 L1: SUBEND

```

16.2.12 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_t(\phi, k, n)$

```

1410 SUB Cpit(U,V,L8,Rn,In,X,Y) ! CALL Cf+Ske+Scdz+Theta4
1415 !
1420 ! - PI mit komplexem Argument --- n komplex
1425 ! EINGABE : u+jv und k = L8 *** Abramowitz 17.7.3 + Lawden S.68
1430 ! AUSGABE : x+jy
1435 COMPLEX Ltm,Ltp,Tm,Tp,Cn,Q,Scd,Cz,Cu,Z
1440 K=L8
1445 IF K=1 THEN K=1-1.E-8
1450 IF K>1 OR K<0 THEN L1
1455 Kc=SQR(1-K*K)
1460 !
1465 Cn=CMPLX(Rn,In)
1470 Q=ASN(SQR(Cn)/K)
1475 !
1480 CALL Ske(K,K8,E8)
1485 CALL Ske(Kc,K9,E9)
1490 Pk=PI/(K8+K8)
1495 Rq=REAL(Q)
1500 Iq=IMAG(Q)
1505 CALL Cf(Rq,Iq,L8,Rf,If)

```

```

1510      !
1515      CALL Cscdz(Rf,If,L8,Rs,Is,Rc,Ic,Rd,Id,Rz,Iz)
1520      Cz=CMPLX(Rz,Iz)
1525      Scd=CMPLX(Rs,Is)/(CMPLX(Rc,Ic)*CMPLX(Rd,Id))
1530      !
1535      CALL Cf(U,V,K,Uu,Vv)
1540      Cu=CMPLX(Uu,Vv)
1545      Tau=K9/K8
1550      !
1555      CALL Theta4(Tau,(Uu+Rf)*Pk,(Vv+If)*Pk,Rtp,Itp)
1560      CALL Theta4(Tau,(Uu-Rf)*Pk,(Vv-If)*Pk,Rtm,Itm)
1565      Tp=CMPLX(Rtp,Itp)
1570      Tm=CMPLX(Rtm,Itm)
1575      Ap=ABS(Tp)
1580      IF Ap=0 THEN
1585          Tp=Tp+1.E-7
1590      END IF
1595      Am=ABS(Tm)
1600      IF Am=0 THEN
1605          Tm=Tm+1.E-7
1610      END IF
1615      Ltp=LOG(Tp)
1620      Ltm=LOG(Tm)
1625      Z=Cu+Scd*(.5*(Ltm-Ltp)+Cu*Cz)
1630      X=REAL(Z)
1635      Y=IMAG(Z)
1640 L1: SUBEND

```

16.2.13 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_c(z,k,a)$

```

1960      SUB Cpie(U,V,L8,Ra,Ia,X,Y)    ! CALL Cscdz+Ske+Theta4
1965      !
1970      ! - PI MIT KOMPLEXEM ARGUMENT --- a komplex --- 31.7.92
1975      ! EINGABE : u+jv und k = L8  und Re a + j Im a
1980      ! AUSGABE : x+jy      ***      Pi (u,a)
1985      COMPLEX Ltm,Ltp,Tm,Tp,Cz,Cu,Z,Scd
1990      K=L8
1995      IF K=1 THEN K=1-1.E-8
2000      IF K>1 OR K<0 THEN Mcpie
2005      Kc=SQR(1-K*K)
2010      !
2015      CALL Ske(K,K8,E8)
2020      CALL Ske(Kc,K9,E9)
2025      Pk=PI/(K8+K8)
2030      !
2035      CALL Cscdz(Ra,Ia,L8,Rs,Is,Rc,Ic,Rd,Id,Rz,Iz)
2040      Scd=CMPLX(Rs,Is)/(CMPLX(Rc,Ic)*CMPLX(Rd,Id))
2045      Cz=CMPLX(Rz,Iz)
2050      !

```

```

2055     Cu=CMPLX(U,V)
2060     Tau=K9/K8
2065     !
2070     CALL Theta4(Tau,(U+Ra)*Pk,(V+Ia)*Pk,Rtp,Itp)
2075     CALL Theta4(Tau,(U-Ra)*Pk,(V-Ia)*Pk,Rtm,Itm)
2080     Tp=CMPLX(Rtp,Itp)
2085     Tm=CMPLX(Rtm,Itm)
2090     Ap=ABS(Tp)
2095     IF Ap=0 THEN
2100         Tp=Tp+1.E-7
2105     END IF
2110     Am=ABS(Tm)
2115     IF Am=0 THEN
2120         Tm=Tm+1.E-7
2125     END IF
2130     Ltp=LOG(Tp)
2135     Ltm=LOG(Tm)
2140     Z=Cu+Scd*(.5*(Ltm-Ltp)+Cu*Cz)
2145     X=REAL(Z)
2150     Y=IMAG(Z)
2155 Mcpie: SUBEND

```

16.2.14 Elliptisches Integral 3. Art $\Pi_j(z,k,a)$

```

2485     SUB Cpij(U,V,L8,Ra,Ia,X,Y)    ! CALL Ske+Cscdz+Theta4
2490     !
2495     ! - PI mit komplexem Argument --- a komplex --- Jakobische Form ---
2500     ! EINGABE : u+jv und k = L8  und Re a + j Im a *****
2505     ! AUSGABE : x+jy          ***      Pi_j (u,a) *****
2510     COMPLEX Ltm,Ltp,Tm,Tp,Cn,Cz,Cu,Z,Tpm
2515     K=L8
2520     IF K=1 THEN K=1-1.E-8
2525     IF K>1 OR K<0 THEN L1
2530     Kc=SQR(1-K*K)
2535     !
2540     CALL Ske(K,K8,E8)
2545     CALL Ske(Kc,K9,E9)
2550     Pk=PI/(K8+K8)
2555     !
2560     CALL Cscdz(Ra,Ia,L8,Rs,Is,Rc,Ic,Rd,Id,Rz,Iz)
2565     Cz=CMPLX(Rz,Iz)
2570     Cu=CMPLX(U,V)
2575     Tau=K9/K8
2580     !
2585     CALL Theta4(Tau,(U+Ra)*Pk,(V+Ia)*Pk,Rtp,Itp)
2590     CALL Theta4(Tau,(U-Ra)*Pk,(V-Ia)*Pk,Rtm,Itm)
2595     Tp=CMPLX(Rtp,Itp)
2600     Tm=CMPLX(Rtm,Itm)
2605     Ap=ABS(Tp)

```

```

2610     IF Ap=0 THEN
2615         Tp=Tp+1.E-7
2620     END IF
2625     Tpm=Tm/Tp
2630     Am=ABS(Tpm)
2635     IF Am=0 THEN
2640         Tpm=Tpm+1.E-7
2645     END IF
2650     Z=.5*LOG(Tpm)+Cu*Cz
2655     X=REAL(Z)
2660     Y=IMAG(Z)
2665 L1: SUBEND

```

16.3 Theta-Funktionen

16.3.1 Theta-Funktion $\vartheta_1(z,k)$

```

645     SUB Theta1(Tau,X,Y,Re,Im)
650     !
655     ! **** Abramowitz Nr. 16.27.1 ****
660     COMPLEX Delta,Sum_neu,Sum_alt,Z
665     INTEGER N,M
670     N=-1
675     M=0
680     Q=EXP(-PI*Tau)
685     IF ABS(Q)>=1 THEN L1
690     Sum_neu=CMPLX(0,0)
695     Z=CMPLX(X,Y)
700     WHILE M<4
705         N=N+1
710         Sum_alt=Sum_neu
715         Delta=(-1)^N*Q^(N*(N+1))*SIN((N+N+1)*Z)
720         Sum_neu=Sum_alt+Delta
725         Bd=ABS(Delta)
730         IF Bd<1.E-8 THEN
735             M=M+1
740         ELSE
745             M=0
750         END IF
755     END WHILE
760     Sum_neu=2*SQR(SQR(Q))*Sum_neu
765     Re=REAL(Sum_neu)
770     Im=IMAG(Sum_neu)
775 L1: SUBEND

```

16.3.2 Theta-Funktion $\vartheta_2(z,k)$


```

785 SUB Theta2(Tau,X,Y,Re,Im)
790 !
795 ! **** Abramowitz Nr. 16.27.2 ****
800 COMPLEX Delta,Sum_neu,Sum_alt,Z
805 INTEGER N,M
810 N=-1
815 M=0
820 Q=EXP(-PI*Tau)
825 IF ABS(Q)>=1 THEN L1
830 Sum_neu=CMPLX(0,0)
835 Z=CMPLX(X,Y)
840 WHILE M<4
845 N=N+1
850 Sum_alt=Sum_neu
855 Delta=Q^(N*(N+1))*COS((N+N+1)*Z)
860 Sum_neu=Sum_alt+Delta
865 Bd=ABS(Delta)
870 IF Bd<1.E-8 THEN
875 M=M+1
880 ELSE
885 M=0
890 END IF
895 END WHILE
900 Sum_neu=2*SQR(SQR(Q))*Sum_neu
905 Re=REAL(Sum_neu)
910 Im=IMAG(Sum_neu)
915 L1: SUBEND

```

16.3.3 Theta-Funktion $\vartheta_3(z,k)$

```

925 SUB Theta3(Tau,X,Y,Re,Im)
930 !
935 ! **** Abramowitz Nr. 16.27.3 ****
940 COMPLEX Delta,Sum_neu,Sum_alt,Z
945 INTEGER N,M
950 N=0
955 M=0
960 Q=EXP(-PI*Tau)
965 IF ABS(Q)>=1 THEN L1
970 Sum_neu=CMPLX(0,0)
975 Z=CMPLX(X,Y)
980 WHILE M<4
985 N=N+1
990 Sum_alt=Sum_neu
995 Delta=Q^(N*N)*COS(2*N*Z)
1000 Sum_neu=Sum_alt+Delta
1005 Bd=ABS(Delta)
1010 IF Bd<1.E-8 THEN
1015 M=M+1

```

```

1020     ELSE
1025         M=0
1030     END IF
1035 END WHILE
1040 Sum_neu=1+Sum_neu+Sum_neu
1045 Re=REAL(Sum_neu)
1050 Im=IMAG(Sum_neu)
1055 L1: SUBEND

```

16.3.4 Theta-Funktion $\vartheta_4(z,k)$

```

1065 SUB Theta4(Tau,X,Y,Re,Im)
1070 !
1075 ! **** Abramowitz Nr. 16.27.4 ****
1080 COMPLEX Delta,Sum_neu,Sum_alt,Z
1085 INTEGER N,M
1090 N=0
1095 M=0
1100 Q=EXP(-PI*Tau)
1105 IF ABS(Q)>=1 THEN L1
1110 Sum_neu=CMPLX(0,0)
1115 Z=CMPLX(X,Y)
1120 WHILE M<4
1125     N=N+1
1130     Sum_alt=Sum_neu
1135     Delta=(-1)^N*Q^(N*N)*COS(2*N*Z)
1140     Sum_neu=Sum_alt+Delta
1145     Bd=ABS(Delta)
1150     IF Bd<1.E-8 THEN
1155         M=M+1
1160     ELSE
1165         M=0
1170     END IF
1175 END WHILE
1180 Sum_neu=1+Sum_neu+Sum_neu
1185 Re=REAL(Sum_neu)
1190 Im=IMAG(Sum_neu)
1195 L1: SUBEND

```

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Prinz, H.: Hochspannungsfelder.
München: Oldenbourg 1969.
- [2] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.: Handbook of mathematical functions.
New York: Dover Publ., 9. Auflage 1970.
- [3] Betz, A.: Konforme Abbildung.
Berlin: Springer, 2. Auflage 1964.
- [4] Buchholz, H.: Elektrische und magnetische Potentialfelder.
Berlin: Springer 1957.
- [5] Nehari, Z.: Conformal mapping.
New York: Dover Publ. 1975; New York: Mc Graw-Hill 1952
- [6] v. Koppenfels, W.; Stallmann, F.: Praxis der konformen Abbildung.
Berlin: Springer 1959.
- [7] Kober, H.: Dictionary of conformal representations.
New York: Dover Publ. 1957.
- [8] Binns, K.J.; Lawrenson, P.L.: Analysis and computation of electric and magnetic field problems. Oxford: Pergamon Press 1963.*
- [9] Ollendorf, F.: Berechnung magnetischer Felder.
Berlin: Springer 1952.
- [10] Weber, E.: Electromagnetic fields, Vol.I., Mapping of fields.
New York: Wiley 1960.
- [11] Lawden, D.F.: Elliptic functions and applications.
Berlin: Springer 1989.
- [12] Jahnke/Emde/Lösch: Tafeln höherer Funktionen.
Stuttgart: Teubner 7. Auflage 1966.
- [13] Moon, P.; Spencer, D.E.: Field theory handbook.
Berlin: Springer, 2. Auflage 1971.
- [14] Churchill, R.V.; Brown J.W.: Complex variables and applications.
London: Mc Graw-Hill, 4. Auflage 1984.
- [15] Lawrentjew, M.A.; Schabat, B.W.: Methoden der komplexen Funktionentheorie.

-
- Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967.
- [16] Spiegel, M.R.: Complex variables (Schaum's outline series)
New York: Mc Graw-Hill 1964.
- [17] Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung.
Berlin: Springer 1964.*
- [18] Tölke, F.: Praktische Funktionenlehre, Bd. II - V.
Berlin: Springer 1966/68.
- [19] Kaden, H.: Open circularly cylindrical metal strip as shield and return circuit of a single-wire line. Siemens Forschungs- und Entwicklungs-Berichte Bd.7 (1978) Nr. 2, S. 82-90.
- [20] Bowman, F.: Introduction to elliptic functions with applications.
New York: Dover Publ. 1961.
- [21] Byrd, P.F.; Friedmann, M.D.: Handbook of elliptical integrals for engineers and scientists. Berlin: Springer, 2.Auflage 1971.
- [22] Gibbs, W.J.: Conformal transformations in electrical engineering.
London: Capman & Hall, 1958.
- [23] Whittaker, E.T.; Watson, G.N.: A course of modern analysis.
Cambridge: Cambridge University Press, 4. Auflage, 1973 (1927).
- [24] Waldron, R.A.: Theory of guided electromagnetic waves.
London: van Nostrand Reinhold 1970.
- [25] Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik.
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 6.Auflage 1977.
- [26] Bulirsch, R.: Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions.
Numerische Mathematik Bd.7 (1965), S.78-90 und Bd.13 (1969) S.305-313, S.353-354, (Handbook series special functions).
- [27] Morath, E.: Nutkontraktionsfaktoren für halbgeschlossene Nuten.
Archiv für Elektrotechnik 54 (1971), S. 164-169.
- [28] Gurevich, M.I.: Theory of jets in ideal fluids.
London: Academic Press, 1965.
- [29] Milne-Thomson, L.M.: Theoretical aerodynamics.
New York: Dover Publ., 4. Aufl. 1973.
- [30] Milne-Thomson, L.M.: Theoretical hydrodynamics.
London: MacMillan, 5. Aufl. 1976.

-
- [31] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F.G.: Higher transcendental functions, Vol. II., New York: Mc Graw-Hill 1953.
- [32] Birkhoff, G.; Zarantonello, E.H.: Jets, wakes and cavities.
London: Academic Press, 1957.

* : mit ausführlichem Literaturverzeichnis zum Thema